8-й семинар

Многочлены Лежандра

Многочлены Лежандра $P_n(x)$ определяются как коэффициенты степенного ряда для производящей функции

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

Если x из отрезка $[-1,1]$, то функция $w(x,t)$ является аналитической по t при $|t|<1$. Поэтому радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$ равен единице.

Для $P_n(x)$ известны следующие формулы

Трехчленная рекуррентная формула

1) $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)x P_n(x) + n P_{n-1}(x) = 0$

формула Родрига

2) $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

формулы для производных

3) $x P_n'(x) - P_{n-1}'(x) = n P_n(x)$

4) $P_n'(x) - x P_{n-1}'(x) = n P_{n-1}(x)$

5) $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1) P_n(x)$

дифференциальное уравнение

6) $$\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]' + n(n+1)P_n(x) =$$
$$= (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

7) соотношение ортогональности

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{m,n}$$

Все эти формулы выведены на лекциях

решить и самостоятельно.