## Задача 1.

Пользуясь производящей функцией для многочленов Лежандра, вычислить $P_n(1)$

## Решение задачи 1.

Подставив в производящую функцию значение $x=1$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Сравнивая коэффициенты при $t^n$ у этих двух степенных рядов, получаем

$$P_n(1) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

## Задача 2. ~~Пауза~~

Вычислить $P_n'(1)$

Пауза, попробуйте вначале решить её самостоятельно.

## Ответ к задаче 2

$$P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

## Решение задачи 2. 



Дифференцирование производящей функции по $x$ даёт равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) t^n = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \frac{t}{(1-2tx+t^2)^{3/2}}$$

при $x = 1$ получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(1) t^n = \frac{t}{(1-t)^3} = \frac{1}{2} t \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{1-t} =$$

$$= \frac{1}{2} t \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) t^{n-2} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) t^{n-1} =$$

$$= \langle \text{замена } n \to n+1 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)n}{2} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} t^n$$

Отсюда, $\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(1) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} t^n$.

Поэтому $P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

## Задача 3.

Найти $P_n(-1)$, $P_n'(-1)$.

## Пауза

Попробуйте сначала решить её самостоятельно

Ответы к задаче 3

$P_n(-1) = (-1)^n$, $\quad P_n'(-1) = (-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)}{2}$

## Решение задачи 3.

4

Замена в производящей функции переменной $x$ на $(-x)$ эквивалентна замене ~~t~~ параметра $t$ на $(-t)$. Поэтому, заменяя в решении предыдущих задачи 1, 2 параметр $t$ на $(-t)$, сразу получаем ответы

$$P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_n'(-1) = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$$

## Другое решение.

Если вспомнить, что для четных номеров $n$ многочлен $P_n(x)$ чётный, а для нечётных $n$ он нечётный, то получим для всех $x$ равенства

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad P_n'(-x) = (-1)^{n+1} P_n'(x)$$

## Задача 4.

Вычислить интеграл

$$I_n = \int_{-1}^{1} x\, P_n(x) P_{n+1}(x)\, dx$$

## Пауза