М Многочлены Лежандра образуют полную ортогональную систему на отрезке $[-1,1]$. Поэтому любая функция $f(x)$ из $L_2[-1,1]$ разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \text{ где}$$

$$c_n = \frac{(f, P_n)}{(P_n, P_n)} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx.$$

Следует отметить, что сама производящая функция $w(x,t) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

даёт готовый ряд Фурье для $w(x,t)$ если считать x переменной, а t — фиксированным параметром.

Задача 7

Разложить в ряд по многочленам Лежандра функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

пользуясь производящей функцией.

Пауза

Ответ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2}\, P_n(x), \quad -1 < x < 1.$$

Решение

Подставив в производящую функцию $t = 1$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x), \quad \text{отсюда}$$

получаем, что $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{2}\, P_n(x)$

Так как точка $t=1$ лежит на границе круга сходимости, то для обоснования этого равенства следует сослаться на вторую теорему Абеля о степенных рядах. (известно, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ сходится условно при $-1<x<1$

(9)

Задача 8.

Разложить в ряд Фурье по многочленам Лежандра функцию

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

Пауза

Ответ

$$\sqrt{1-x} = -2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}P_n(x)$$

Решение

$$\sqrt{1-x} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x}} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2}P_n(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2}P_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2}xP_n(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2}P_n(x) - \sqrt{2}x - \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\,\frac{(n+1)P_{n+1}+nP_{n-1}}{2n+1} =$$

здесь мы вынесли отдельным слагаемым $\sqrt{2}xP_0(x) = \sqrt{2}x$ и заменили (при $n \geq 1$) каждый член $xP_n(x)$ по рекуррентной формуле 1) из первого файла.

Сдвинув индексы суммирования в последних двух суммах, получим

$$\sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2}\, P_n(x) - \sqrt{2}\, P_1(x) -$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\, n P_n(x)}{2n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}(n+1) P_n(x)}{2n+3} =$$

$= \langle$ приводим к общему знаменателю и выносим из сумм слагаемые при $n=0,1 \rangle$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{5} P_1(x) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\left[(2n-1)(2n+3) - n(2n+3) - (n+1)(2n-1)\right]}{(2n-1)(2n+3)} P_n(x)$$

$$= -2\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} P_n(x).$$

Эта задача и метод её решения пригодятся ~~для~~ для решения задачи 14 из месячного задания

Задача 9.

Разложить в ряд Фурье по многочленам Лежандра функцию $f(x) = \operatorname{sgn} x$

пауза

Ответ

$$\operatorname{sgn} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} + \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}\right] P_{2n+1}(x)$$

Решение

Из нечётности функции $\operatorname{sgn} x$ следует, что $c_{2n} = 0$,

$$c_{2n+1} = \frac{2(2n+1)+1}{2}\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \, P_{2n+1}(x)\,dx =$$

$$= (4n+3)\int_{0}^{1} P_{2n+1}(x)\,dx$$

По рекурентной формуле 6) из первого файла, подставляем

$$(4n+3)P_{2n+1} = P'_{2n+2} - P'_{2n}.$$

Поэтому

$$c_{2n+1} = \left(P_{2n+2}(x) - P_{2n}(x)\right)\Big|_0^1 = P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0)$$

(следует вспомнить, что $P_{2n}(1) = P_{2n+2}(1) = 1$)

Из месячного задания (задача 12) мы знаем, что $P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

Отсюда, $c_{2n+1} = (-1)^n \left[\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} - \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}\right]$