Семинар 9. Норма оператора.

Ограниченность операторов. Обратный оператор.

Пусть $A: H_1 \to H_2$ — линейный оператор гильбертовых пространств H_1 и H_2. Тогда мы определяем норму A

$$(*) \qquad \|A\| = \sup_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Оператор называется ограниченным, если его норма конечна. Оператор называется непрерывным, если он переводит всякую сходящуюся послед-ть $\{x_n\}$ в H_1 в сход. послед-ть $\{Ax_n\}$ в H_2.

Теорема: $A: H_1 \to H_2$ ограничен $\Leftrightarrow$ A — непрерывен.

Задача 1: Докажите, что в пр-ве $M_2(\mathbb{R})$ — вещ. 2×2 матриц нельзя ввести скал. произведение, согласованное с нормой матрицы, заданной $(*)$.

Решение: Нужно найти контрпример к рав-ву $\square$:

$$\|A-B\|^2 + \|A+B\|^2 = 2\|A\|^2 + 2\|B\|^2.$$

~~Так как~~ $\cancel{\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Ax, Ax)}$

Здесь мы отождествляем операторы $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с 2×2 матрицами в ОНБ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, скал. произв. $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2$.

Так как $\|A\|^2 = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^2}=1} \|Ax\|^2 = \sup (Ax, Ax)_{\mathbb{R}^2}$, то удобно рассматривать диагональные матрицы $A = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, так что $(Ax, Ax) = \lambda_1^2 x_1^2 + \lambda_2^2 x_2^2$. Рассмотрим $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Тогда $\|(A-B)x\|^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$

и $\sup\limits_{\|x\|=1} \|(A-B)x\|^2 = 1$. Аналогично $\|(A+B)x\|^2 = \|x\|^2$

и $\sup\limits_{\|x\|=1} \|(A+B)x\|^2 = 1$, так что $\|A-B\|^2 = 1$, $\|A+B\|^2 = 1$.

В то же время $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{достиг. на} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}{\|A\|^2 = 1}$ и $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{достиг. на} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}{\|B\|^2 = 1}$, так что

$$\|A-B\|^2 + \|A+B\|^2 = 2 \neq 4 = 2 \cdot \|A\|^2 + 2\|B\|^2$$

Значит, норма на $M_2(\mathbb{R})$ не порождается скал. произведением.

Задача 2: Проверьте линейность и найдите норму оператора $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, определённого формулой $(Ax)(t) = x(t+t_0)$, где x - произв. ф-ция из $L_2(\mathbb{R})$, t_0 - фикс. число. (САМОСТОЯТЕЛЬНО, Д/З).

Проверить линейность и найти норму след. операторов $A : l_2 \to l_2$, если $x = (x_1, x_2, \dots)$ - произв. вектор из l_2.

3) $Ax = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$

Пауза! Думаем!

Решение: $A(\alpha x + \beta y) = (0, \alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots, \alpha x_n + \beta y_n, \dots) =$

$= \alpha(0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) + \beta(0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = \alpha Ax + \beta Ay.$