Норма: $\|A\| = 1$.

Действительно, $\|A\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \sup\limits_{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = 1} \underbrace{(0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots)}_{= 1} = 1$

$A: l_2 \to l_2$

Задача 4): $Ax = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$. (линейность и норму)

Пауза!

Решение: линейность: $A(\alpha x + \beta y) =$

$= (\alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n, \ldots) =$

$= \alpha(x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) + \beta(y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots) =$

$= \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ay$.

Норма: $\|A\| = 1$.

Действительно: $\|Ax\|^2 = x_2^2 + x_3^2 + \ldots = \sum\limits_{n=2}^{\infty} x_n^2 =$

$= \|x\|^2 - x_1^2 \leq \|x\|^2$, так что при $\|x\|^2 = 1$

$\|Ax\|^2 \leq 1$ и равенство достигается, когда $\|x\|^2 - x_1^2 = \|x\|^2$,

$\Downarrow$

$\|A\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 \leq 1$

т.е. $x_1 = 0$, таким образом $\|A\| = 1$.

$\uparrow$

напр. $(0, 1, 0, 0, \ldots)$

проверить линейность и найти норму $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

<u>Задача 6:</u> $(Ax)(t) = x(t^2)$.

Пауза!

<u>Решение:</u> $\|A\| = \infty$ (оператор неограничен)

<u>Линейность:</u> $A(\alpha x + \beta y)(t) = (\alpha x + \beta y)(t^2) = \alpha x(t^2) + \beta y(t^2) =$

$= \alpha(Ax)(t) + \beta(Ay)(t). \Rightarrow A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$

<u>Норма:</u> Во-первых, A не определён на всём $L_2[0,1]$: для интегрируемой с квадратом $x(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ мы получаем $(Ax)(t) = x(t^2) = \frac{1}{\sqrt[4]{t^2}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \notin L_2[0,1]$.

Но даже если мы будем рассматривать только те $x \in L_2[0,1]$, для которых $(Ax)(t) \in L_2[0,1]$, то, тем не менее

$\sup\limits_{\substack{Ax\text{ — определён} \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \infty$. Действительно, рассмотрим последовательность $x_n(t) = \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{n} - \frac{1}{4}} \in L_2[0,1]$,

$\|x_n\| = 1$, $(Ax_n)(t) = x_n(t^2) = \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{2}{n} - \frac{1}{2}}$)

$$\|Ax_n\|^2 = \int_0^1 x_n^2(t^2)\,dt = \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{2}\right)\int_0^1 t^{\frac{4}{n}-1}\,dt = \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{4}{n}-1\right)+1}\, t^{\left(\frac{4}{n}-1\right)+1}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{2}}{\frac{4}{n}} = \frac{1}{2} + \frac{n}{8} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$ Значит, $\|A\| = \infty$.