<u>Обратимость операторов. Обратной оператор.</u>

Лин. оператор $A: H_1 \to H_2$ называется обратимым, если $\forall y \in H_2$ уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения.

Если A - обратим, то каждому $y \in \operatorname{Im} A$ можно поставить в соответствие вектор $x \in H_1$ такой, что $Ax = y$.

Это соответствие определяет $A^{-1}: \operatorname{Im} A \to H_1$ - обратной к оператору A. Это линейный оператор.

<u>Задача 9</u>: Докажите, что оператор $A: H_1 \to H_2$ обратим $\Leftrightarrow \forall x \neq 0 \quad Ax \neq 0$.

Пауза!

<u>Решение</u>: $\Rightarrow$: Пусть A - обратим. Тогда решение $x = 0$ уравнения $Ax = 0$ - единственное и ни для какого другого x, т.е. $x \neq 0$ мы не будем иметь $Ax = 0$.

$\Leftarrow$: Пусть $\forall x \neq 0 \quad Ax \neq 0$. Допустим, для некоторого $y \in H_2$ мы нашли $x_1, x_2 \in H_1$, такие что $Ax_1 = y$
$Ax_2 = y$

Тогда $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = y - y = 0$ и мы должны иметь $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow$ уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения

Выяснить обратимость и найти обратный, если он существует. $A : l_2 \to l_2$.

Задача 10: $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$.

Пауза!

Решение: Обратим, обратный $A^{-1} y = (y_2, y_3, \dots)$.

$y = (y_1, y_2, \dots)$

$$A^{-1} : \underbrace{\{ (0, y_2, y_3, \dots) \in l_2 \}}_{\text{не всё } l_2} \to l_2 .$$

Обратимость: $x \neq 0 \Rightarrow Ax \neq 0$.

Задача 11: $Ax = (x_2, x_3, \dots)$

Пауза!

Решение: A не явл. обратимым, $x = (1, 0, 0, \dots) \neq 0$, но

$Ax = (0, 0, 0, \dots) = 0$.

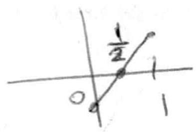
$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

Задача 12: $(Ax)(t) = t^{\alpha} \int_0^1 x(s)\,ds$.

Пауза!

Решение: не обратим: берём любой $x \in L_2[0,1]$ ортогональный $1 \in L_2[0,1]$, т.е $\int_0^1 1 \cdot x(s)\,ds = 0$, тогда $(Ax)(t) = t^{\alpha} \cdot 0 = 0$.

Например $x(s) = s - \frac{1}{2}$.



Задача 13: $(Ax)(t) = a(t)x(t)$, $a: [0,1] \to \mathbb{C}$ фикс. непр. ф-ция.

Пауза!

Решение: Здесь есть 2 случая: если множество

$Z = \{t \in [0,1] \mid a(t) = 0\}$ имеет меру Лебега $\mu(Z) > 0$,

то оператор A не обратим: мы можем взять $x(t) = \chi_Z(t)$, тогда $L_2[0,1]$-класс ф-ции $x(t)$ – ненулевой и $(Ax)(t) \equiv 0$.

и $\cancel{\|(Ax)(t)\|^2 = \int_0^1 |a(t)x(t)|^2 dt = \int_Z |a(t)\chi_Z(t)|^2 dt}$

Случай $\mu(Z) = 0$ ____ самостоятельно! оператор A – обратим.

$\mu(Z) = 0$; Допустим $(Ax)(t) = 0$ почти всюду, т.е.

$$\|Ax\|^2 = \int_0^1 |a(t)|^2 |x(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow \overset{|a(t)x(t)| \geq 0}{\text{должна}} \text{ занулиться}$$

почти всюду в $[0,1]$, т.е. $|x(t)|^2$ должна зануляться почти всюду в $[0,1] \setminus Z$, т.е почти всюду в $[0,1]$.

Обратный оператор: самостоятельно найти!