Основы функционального анализа ФФ, II курс

<u>10й семинар</u>: Линейные функционалы. Бра- и кет-векторы

По плану проходит с 6 по 11 апреля 2020г

<u>Опр</u>: Линейным функционалом в гильбертовом пространстве H называется линейный оператор, отображающий H во множество чисел (вещественных или комплексных).

<u>Определение-напоминание</u>: Норма линейного функционала $f: H \to \mathbb{C}$ задается любой из формул

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| = 1} |f(x)| = \sup_{x \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

<u>Теорема</u> (Фридьеша Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала). Пусть H — гильбертово пространство. Тогда имеют место следующие утверждения:

(1) $\forall f: H \to \mathbb{C}$ — непрерывного линейного функционала $\exists!\, x_0 \in H$ такой, что $f(x) = (x, x_0)$ для всех $x \in H$; при этом $\|f\| = \|x_0\|$.

(2) $\forall x_0 \in H$ формула $f(x) = (x, x_0)$ задает линейный непрерывный функционал на H такой, что $\|f\| = \|x_0\|$.

В следующих задачах 1-4 нужно док-ть, что функционалы $f: l_2 \to \mathbb{C}$ линейны; нужно выяснить непрерывны ли эти функционалы, а также найти их нормы.

Задача 1 $\quad f(x_1,\dots,x_n,\dots)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}$.

Решение I: Неравенство Коши-Буняковского для ℓ_2 имеет вид

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}\right| = |(x,y)| \le \|x\|\cdot\|y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2},$$

где $x=(x_1,\dots,x_n,\dots)\in\ell_2$ и $y=(y_1,\dots,y_n,\dots)\in\ell_2$.

В силу этого неравенства ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}$$

сходится (и даже абсолютно сходится) $\forall x\in\ell_2$:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}} = \|x\|\cdot\frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

это известно из мат. анализа

Прямо из формулировки задачи 1 видно, что $f(x)=(x,x_0)$, где $x_0=\left(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots\right)\in\ell_2$.

Поэтому по теореме Рисса заключаем, что f линейный, а $\|f\|=\|x_0\|=\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{6}}<+\infty$.

Следовательно, f — непрерывный функционал.

Впрочем, можно обойтись и без использования теоремы Рисса:

Решение II: После того, как мы заметили, что $f(x) = (x, x_0)$, где $x_0 = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ линейность f следует из линейности скалярного произведения по первому аргументу:

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y, x_0) = \alpha (x, x_0) + \beta (y, x_0) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

а норма f легко вычисляется с помощью неравенства Коши - Буняковского:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |(x, x_0)| \le \sup_{\|x\|=1} \|x\| \cdot \|x_0\| = \|x_0\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

$$\sup_{\|x\|=1} |(x, x_0)| \ge \left| \left(\frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0 \right) \right| = \frac{|(x_0, x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{\|x_0\|^2}{\|x_0\|} = \|x_0\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Значит, $\frac{\pi}{\sqrt{6}} \le \|f\| \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \Rightarrow \|f\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

Задача 2: $f(x_1, \dots, x_n, \dots) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\sqrt{k(k+1)}}$.

Рекомендую сделать паузу в просмотре видео.
Порешать задачу самостоятельно.
И только потом продолжить просмотр видео, чтобы узнать ответ и моё решение.

Ответ к задаче 2: $\|f\| = 1$

Решение задачи 2: Ясно, что $f(x) = (x, x_0)$, где $x_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}}, \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \dots \right)$. По теореме Рисса f - линеен и

$$\|f\| = \|x_0\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots} = 1 < +\infty.$$

Т.к. $\|f\| < +\infty$, то f непрерывен.

61 Задача 3: $f(x_1,\dots,x_n,\dots)=\sum\limits_{k=1}\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2^{k+1}}$.

62 | Рекомендую поставить видео на паузу
63 | и, прежде чем продолжать, порешать
64 | задачу самостоятельно.

65 Ответ к задаче 3: $\|f\|=\frac{1}{2}$.

66 Решение задачи 3: Преобразуем выражение, задающее
67 функционал f:

68 $$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k+x_{k+1}}{2^{k+1}}=\sum_{k=1}\frac{x_k}{2^{k+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_{k+1}}{2^{k+1}}\underset{\uparrow\ \text{замена } n=k+1}{=}\sum_{k=1}\frac{x_k}{2^{k+1}}+\sum_{n=2}\frac{x_n}{2^n}=$$

69 $$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^{k+1}}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x_k}{2^k}\pm\frac{x_1}{2}=-\frac{x_1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\right)}_{=\frac{2+1}{2^{k+1}}=\frac{3}{2^{k+1}}}x_k=$$

70 $$=\underbrace{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)}_{=\frac{1}{4}}x_1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{3x_k}{2^{k+1}}.$$

71 Значит $f=(x,x_0)$, где $x_0=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2},\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^3},\dots,\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^k},\dots\right)$

72 Следовательно, f ограничен и $\|f\|^2=\|x_0\|^2=$

73 $$=\frac{1}{2^4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2^4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2^6}+\dots+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2^{2k}}+\dots\overset{\uparrow\ \text{по ф-ле суммы геометрической прогрес.}}{=}$$

74 $$=\frac{1}{2^4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1/2^4}{1-1/2^2}=\frac{1}{2^4}+\frac{3^{\cancel{2}}}{\cancel{2^2}}\cdot\frac{\cancel{2^2}}{2^4\cdot\cancel{3}}=\frac{1}{2^4}+3\cdot\frac{1}{2^4}=$$

75 $$=\frac{2^2}{2^4}=\frac{1}{2^2}.$$

76 Значит $\|f\|=\frac{1}{2}$ и f — непрерывен.

77 Задача 4: $f(x_1,\dots,x_n,\dots)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_{k2}$.

78 | Пауза

Ответ к задаче 4: этот функционал не является непрерывным; другими словами — он разрывен в каждой точке пр-ва l_2!

Решение задачи 4: линейность f очевидна.
Допустим, f непрерывен. По теореме Рисса он имеет вид $f(x) = (x, x_0)$, где $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0, \dots) \in l_2$.
Значит $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{k^2} = f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \overline{x_k^0} \quad \forall x \in l_2$.
Подставив сюда в качестве x базисный орт $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$, где 1 стоит на n-ом месте, получим, что если n не является полным квадратом, т.е. если $\forall k \quad n \neq k^2$, то

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k^2} = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \overline{x_m^0} = \overset{\overset{1}{\parallel}}{x_n} \overline{x_n^0} = \overline{x_n^0};$$

если же n является полным квадратом, т.е. $\exists k: n = k^2$, то

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k^2} = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \overline{x_m^0} = \overset{\overset{1}{\parallel}}{x_n} \overline{x_n^0} = \overline{x_n^0}.$$

Значит, $x_0 = (\underset{\substack{\uparrow \\ 1\text{е место}}}{1}, 0, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ 2^2\text{-место}}}{1}, 0, 0, 0, \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k^2\text{-место}}}{1}, 0, \dots)$

но такой вектор x_0 не лежит в l_2, потому что ряд из бесконечного числа единиц $\sum\limits_{n - \text{полные квадраты}} 1^2$ расходится!
Пришли к противоречию с тем, что $x_0 \in l_2$.
Полученное противоречие показывает, что наше допущение о непрерывности f неверно. Значит, f разрыве

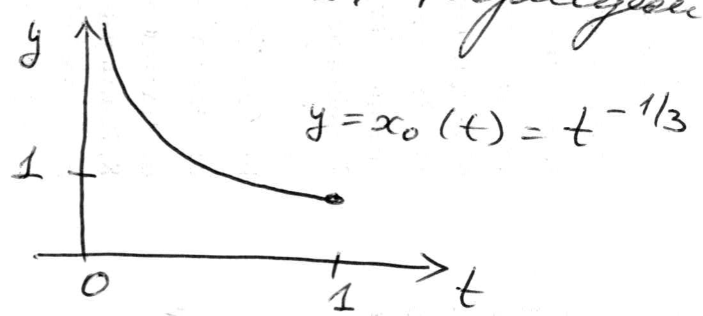
В задачах 5-7 нужно доказать, что функционалы $f: L_2[0,1] \to \mathbb{C}$ линейны и непрерывны, а также нужно найти их нормы.

<u>Задача 5</u>: $f(x) = \int_0^1 t^{-1/3} x(t)\,dt; \quad x \in L_2[0,1]$

<u>Решение</u>: Ясно, что функционал f можно записать через скалярное произведение пр-ва $L_2[0,1]$ в виде ф-лы

$$f(x) = (x, x_0) = \int_0^1 x(t)\,\overline{x_0(t)}\,dt,$$ где

$x_0(t) = t^{-1/3}, \quad t \in (0,1]$. Нарисуем график ф-ии x_0:



Эта ф-ия неограничена на $(0,1]$. Проверим лежит ли она в $L_2[0,1]$:

$$\|x_0\|^2_{L_2[0,1]} = \int_0^1 |x_0(t)|^2 dt = \int_0^1 t^{-2/3} dt =$$

$$= \frac{t^{1-2/3}}{1-2/3}\Big|_0^1 = 3t^{1/3}\Big|_0^1 = 3.$$

Значит, $x_0 \in L_2[0,1]$.

Следовательно, по теореме Рисса ф-ал $f = (x, x_0)$ линеен, непрерывен и

$\|f\| = \|x_0\| = \sqrt{3}$.

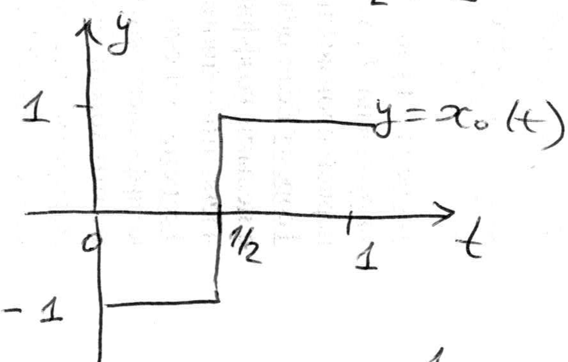
Ответ: $\|f\| = \sqrt{3}$.

120 **Задача 6**: $f(x)=\int_0^1 x(t)\,\mathrm{sgn}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt;\ x\in L_2[0,1]$

121 Поставьте видео на паузу
122 и решите задачу самостоятельно.
123 Затем сверьтесь с моими ответами
124 и решением.

125 **Ответ**: $\|f\|=1$.

126 **Решение** задачи 6: Ясно, что $f(x)=(x,x_0)$,
127 где $x_0(t)=\mathrm{sgn}\left(t-\frac{1}{2}\right)$, $t\in[0,1]$. Рисуем
128 график x_0:



129 $\|x_0\|^2_{L_2[0,1]}=\int_0^1|x_0(t)|^2dt=\int_0^1 1\cdot dt=1$.

130 Значит, f линеен, непрерывен и $\|f\|=\|x_0\|=1$.

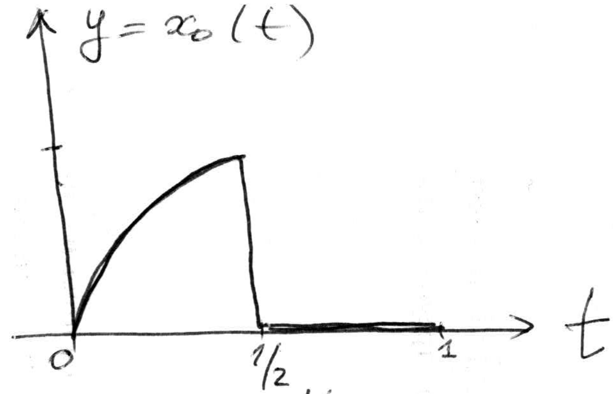
131 **Задача 7**: $f(x)=\int_0^{1/2}\sqrt{t}\,x(t)\,dt$, $x\in L_2[0,1]$.

132 Поставьте видео на паузу
133 и решите задачу сами.
134 Затем сверьтесь с моим ответом
135 и решением.

136 **Ответ**: $\|f\|=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

137 **Решение** задачи 7: Ясно, что $f(x)=(x,x_0)=$
138 $=\int_0^1 x(t)\overline{x_0(t)}\,dt$, где $x_0(t)=\begin{cases}\sqrt{t}, & \text{если } t\in(0,1/2)\\ 0, & \text{если } t\in(1/2,1)\end{cases}$

График x_0 :



$$\|x_0\|^2_{L_2[0,1]} = \int_0^1 |x_0(t)|^2\,dt = \int_0^{1/2} t\,dt = \frac{1}{2} t^2\Big|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} < +\infty.$$

Значит, по теореме Рисса, f линеен, непрерывен и $\|f\| = \|x_0\| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.