Бра- и кет-векторы

Бра- и кет-векторы — это формализм, позволяющий удобно работать с векторами и отображениями. Он был предложен Дираком и прочно утвердился в физической литературе. Мы изучим его азы, а реально работать в этом формализме вы будете в квантовой механике.

В рамках этого формализма считают, что скалярное произведение линейно по второму аргументу. При этом скалярное произведение записывают так

$$(x, y) = \langle y | x \rangle = \{ \langle y | \} \{ | x \rangle \}$$

<u>Опр.</u> $\langle y |$ ≡ бра-вектор ≡ вектор сопряжённого пр-ва H^* ≡ линейный непрерывный ф-ал на H.

$| x \rangle$ ≡ кет-вектор ≡ вектор исходного пр-ва H.

<u>Замечание</u>: Название происходит от <u>bra</u>c<u>ket</u> ≡ скобка

Из лекций ⇒ если $x_1, \ldots, x_n$ — ортонормированный базис в H, то $I_H = \sum_{k=1}^{n} |x_k\rangle\langle x_k|$

↑ тождественный оператор в H.

Из линейной алгебры ⇒ в ортонормированном базисе тождественному оператору соответствует единичная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомню, как строится матрица оператора $A: H \to H_1$ относительно ортонормированных базисов $x_1, \dots, x_n$ пр-ва H и $y_1, \dots, y_m$ пр-ва H_1:

Поскольку A линеен, то он полностью задаётся заданием векторов Ax_j, $j = 1, \dots, n$. Разлагая каждый из этих векторов по базису $y_1, \dots, y_m$, т.е. написав

$$A x_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} y_k , \qquad (*)$$

видим, что каждый из векторов Ax_j полностью задаётся набором чисел a_{kj}, где $k = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Значит, набором этих чисел определяется и оператор A.

<u>Опр</u>. Числа a_{kj} из ф-лы $(*)$ называются элементами матрицы оператора A в базисах $x_1, \dots x_n$ пр-ва H и $y_1, \dots, y_m$ пр-ва H_1.

Чтобы найти a_{lj}, умножим обе части $(*)$ на y_l:

$$(A x_j, y_l) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \underbrace{(y_k, y_l)}_{= \delta_{kl} \text{ - символ Кронекера}} = a_{lj} .$$

В следующих задачах 8–10 найдите матрицы указанных операторов, считая что $x_1, \dots, x_n$ — ортонормированный базис пр-ва H:

<u>Задача 8</u>: $A = |x_1\rangle \langle x_1|$

187 <u>Решение задачи 8</u>: Воспользуемся ф-лой

188 $$a_{lj} = (Ax_j, x_l)$$

189 ведь в нашем случае A отображает H в
190 себя, а значит базис $y_1, \ldots y_m$ совпадает с
191 базисом $x_1, \ldots, x_n$.

192 Перепишем эту ф-лу в бра- и кет-обоз-
193 начениях:

194 $$a_{lj} = \langle x_l | Ax_j \rangle = \langle x_l | A | x_j \rangle =$$

195 $$= \langle x_l | \{ | x_1 \rangle \langle x_1 | \} | x_j \rangle = \{ \langle x_l | x_1 \rangle \} \{ \langle x_1 | x_j \rangle \} =$$

196 $$= \underbrace{\delta_{l1} \, \delta_{1j}}_{\text{символ Кронекера}} = \begin{cases} 1, & \text{если } l = j = 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

197 Значит, матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

198 Сделаем ещё один шаг и покажем,
199 что оператор у задачи 8 является оператором
200 проектирования:

201 Разложим произвольный вектор $x \in H$ по базису
202 $x_1, \ldots x_n$: $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k = (x, x_k)$ -
203 коэф. Фурье вектора x. Тогда $Ax = A\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) =$
204 $= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A x_k$. Перепишем эту ф-лу в бра- и
205 кет-обозначениях: $A|x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \{ |x_1\rangle \langle x_1| \} \{ |x_k\rangle \} \lambda_k =$
206 $= \sum_{k=1}^{n} |x_1\rangle \{ \underbrace{\langle x_1 | x_k \rangle}_{= \delta_{1k} \text{ - символ Кронекера}} \} \lambda_k = |x_1\rangle \lambda_1 = \lambda_1 x_1 = (x, x_1) x_1$ -
207 - это ортогональная проекция вектора x на единичный вектор x_1.

208 **Задача 9** $A = |x_1\rangle\langle x_2|$

209 Поставьте видео на паузу,
210 решите задачу сами, а потом
211 посмотрите ответ и моё решение

212 **Ответ**: оператор A имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

213 **Решение**: как и в задаче 8, пишем

214 $a_{lj} = \langle x_l|Ax_j\rangle = \langle x_l|A|x_j\rangle =$

215 $= \langle x_l|\{|x_1\rangle\langle x_2|\}|x_j\rangle = \{\langle x_l|x_1\rangle\}\{\langle x_2|x_j\rangle\} =$

216 $= \delta_{l1}\cdot\delta_{2j} = \begin{cases} 1, \text{ если } l=1 \text{ и } j=2; \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

символы Кронекера

217 Значит, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

218 **Задача 10** Используя бра- и кет-обозначения,
219 найдите резольвенту для оператора, заданного
220 в некотором ортонормированном базисе
221 матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

222 **Решение.** Из лекций $\Rightarrow$ резольвентой оператора
223 A называется оператор $(A-\lambda I)^{-1}$, где
224 $\lambda \in \mathbb{C}$. Более того, из лекций $\Rightarrow$
225 если $x_1, \dots x_n$ - ортонормированный
226 базис, состоящий из собственных векторов оператора A,
227 то $(A-\lambda I)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k\rangle\langle x_k|}{\lambda_k - \lambda}$,

где λ_k – собственное число оператора A, соответствующее собственному вектору x_k. Поэтому сначала найдём собственные векторы $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ оператора A: $\xi = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2$

$$A\xi = \lambda \xi \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_2 = \lambda \xi_1 \\ \xi_1 = \lambda \xi_2 \end{cases}$$

Значит, $\begin{cases} \xi_2 = \lambda^2 \xi_2 \\ \xi_1 = \lambda^2 \xi_1 \end{cases}$. Поскольку либо $\xi_1 \neq 0$, либо $\xi_2 \neq 0$, то $\lambda^2 = 1$. Значит $\lambda = \pm 1$ – собственные значения оператора A.

Найдём собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$:

$A\xi = \xi \Leftrightarrow \xi_2 = \xi_1 \Rightarrow \xi = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – ведь нам нужен вектор единичной длины. Два найденных вектора противоположны друг другу, поэтому возьмём только один из них: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ – явл. собственным вектором оператора A, отвечающим собственному значению $\lambda_1 = 1$

Аналогично ищем собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = -1$:

$A\xi = -\xi \Leftrightarrow \xi_2 = -\xi_1 \Rightarrow \xi = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ – искомый собственный вектор.

Упростим выражение $|x_1\rangle\langle x_1| =$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_1| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_2| \right\} =$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} u_2$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ |u_1\rangle\langle u_1| + |u_1\rangle\langle u_2| + |u_2\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| \right\}$$

Аналогично $|x_2\rangle\langle x_2| =$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |u_2\rangle \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_1| - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_2| \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ |u_1\rangle\langle u_1| - |u_1\rangle\langle u_2| - |u_2\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| \right\}$$

Теперь можем записать ф-лу для резольвенты:

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{k=1}^{2} \frac{|x_k\rangle\langle x_k|}{\lambda_k - \lambda} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\lambda} \left\{ |u_1\rangle\langle u_1| + |u_1\rangle\langle u_2| + |u_2\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{-1-\lambda} \left\{ |u_1\rangle\langle u_1| - |u_1\rangle\langle u_2| - |u_2\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| \right\} \ominus$$

Поскольку $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\lambda} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+\lambda} = \frac{(\cancel{1}+\lambda) - (\cancel{1}-\lambda)}{2(1-\lambda^2)} = \frac{\lambda}{1-\lambda^2}$

и $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\lambda} = \frac{(1+\cancel{\lambda}) + (1-\cancel{\lambda})}{2(1-\lambda^2)} = \frac{1}{1-\lambda^2}$, то можем

продолжить рав. во $\ominus$:

$$\ominus \frac{1}{1-\lambda^2} \left\{ |u_1\rangle\langle u_1| \lambda + |u_1\rangle\langle u_2| + |u_2\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| \lambda \right\}$$

Это и есть ответ, который мы

можем переписать в обычном

„матричном" виде с помощью задач 8 и 9:

$$(A-\lambda I)^{-1} = \frac{1}{1-\lambda^2}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Проверим прямым вычислением, что найденный нами ответ правильный:

$$(A-\lambda I)(A-\lambda I)^{-1} = \begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}\frac{1}{1-\lambda^2} =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda^2}\begin{pmatrix}-\lambda^2+1 & 0\\ 0 & 1-\lambda^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I.$$

Задача 10 решена. Ответ содержится в строчках 266 и 271.

Желающие порешать ещё больше задач могут найти их в конце § 11 у методички „Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах".