Основы функционального анализа. ФФ, II курс
14-й семинар: Сведение дифференциальных уравнений к интегральным и наоборот. Решение интегральных уравнений с вырожденным ядром.
(По плану этот семинар проходит с 4 по 9 мая 2020).

Из пункта 8.1 лекций известно, что начальную задачу для дифференциального ур-ния (с известными коэффициентами $p_1(t), \dots, p_n(t)$ и правой частью $f(t)$)

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + p_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + p_n(t)x(t) = f(t) \\ x^{(n-1)}(a) = x^{(n-2)}(a) = \dots = x'(a) = x(a) = 0 \\ a \le t \le b \end{cases}$$

можно свести к интегральному уравнению, введя в рассмотрение новую неизвестную функцию $y(t)$, которая связана со старой неизвестной функцией $x(t)$ с помощью формулы

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-1}\,ds.$$

В самом деле, на лекциях было показано, что последовательное дифференцирование даёт

$$x'(t) = \frac{1}{(n-2)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-2}\,ds,$$

$$\dots\dots$$

$$x^{(k)}(t) = \frac{1}{(n-k-1)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-k-1}\,ds,$$

$$\dots\dots$$

Напоминание правила дифференцирования по параметру интеграла, у которого и подынтегральная функция, и пределы интегрирования зависят от параметра:

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx +$$

$$+ \beta'(y)\, f(\beta(y), y) - \alpha'(y)\, f(\alpha(y), y).$$

Вывод этой формулы можно найти, например, у Г. М. Фихтенгольца в „Курсе дифференциального и интегрального исчисления". Том 2. пункт 509.

22 $$x^{(n-1)}(t) = \int_a^t y(s)\,ds,$$

23 $$x^{(n)}(t) = y(t).$$

24 Подставив эти выражения для производных
25 в исходное дифференциальное уравнение,
26 получим

27 $$y(t) + p_1(t)\int_a^t y(s)\,ds + \dots + p_n(t)\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-1}ds = f(t),$$

или

28 $$y(t) + \int_a^t K(t,s)\,y(s)\,ds = f(t),$$

29 где $K(t,s) = p_1(t) + \frac{1}{1!}p_2(t)(t-s) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}p_n(t)(t-s)^{n-1}.$

30 Это и есть искомое интегральное
31 уравнение Вольтерра II рода с ядром K.
32 Начальные условия для дифференциального
33 уравнения ~~учтены~~ выполняются автоматически.
34 Обсудим как быть, если не все началь-
35 ные условия (см. строку 11) равны нулю?
36. Тогда вместо (стр. 22) мы бы получили

$$x^{(n-1)}(t) = \int_a^t y(s)\,ds + x^{(n-1)}(a),$$

а вместо $x^{(n-2)}(t)$ — получим бы

$$x^{(n-2)}(t) = \frac{1}{2!}\int_a^t y(s)(t-s)\,ds + x^{(n-1)}(a)(t-a) + x^{(n-2)}(a).$$

и наконец, вместо $x(t)$ получим бы

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t y(s)(t-s)^{n-1}\,ds + P(t),$$

где $P(t)$ — некоторый многочлен степени $n-1$ от переменной t (или $t-a$) с коэффициентами, которые некоторым (довольно сложным) образом выражаются через начальные данные $x^{(n-1)}(a), x^{(n-2)}(a), \dots, x(a)$.

Чтобы не следить за этими сложными соотношениями, говорят, что изначально ищут решение $x(t)$ в виде (ср. 42), где $P(t)$ — многочлен ~~с нео~~ степени $n-1$ с неопределёнными ~~коэффи~~ коэффициентами, которые подбирают по мере решения задачи.

Задача 1. Составить интегральное ур-ние, соответствующее ~~з~~ начальной задаче

$$\begin{cases} x'(t) + 2t\,x(t) = e^t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Сделайте перерыв в просмотре видео, решите задачу самостоятельно, а затем продолжите просмотр

Ответ: $y(t) + \int_0^t 2t\, y(s)\,ds = e^t - 2t$.

Решение задачи 1: В соответствии с изложенным выше способом решения (см. строку 42), полагаем

$$x(t) = \int_0^t y(s)\,ds + c.$$

Поскольку $x(0)=1$ (см. ст. 56), то $C=1$.
Дифференцируя ст. 64 получаем $x'(t)=y(t)$.
Подставляя $x(t)$ и $x'(t)$ в исходное дифференциальное ур-ние (ст. 55), получим

$$y(t) + 2t\left[\int_0^t y(s)\,ds + 1\right] = e^t$$ или

$$y(t) + \int_0^t 2t\, y(s)\,ds = e^t - 2t$$

Это ур-ние Вольтерра II рода с ядром $K(t,s)=2t$ и правой частью $f(t)=e^t-2t$.
Никаких граничных или начальных условий к нему не требуется: они „встроены" прямо в уравнение.

Задача 2: Составьте интегральное уравнение, соответствующее начальной задаче

$$\begin{cases} x''(t) - t x'(t) + e^t x(t) = t^2 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = -1 \end{cases}$$

Сделайте перерыв в просмотре видео. Решите задачу самостоятельно. Затем продолжите просмотр.

84. Ответ: $y(t) + \int_0^t [(t-s)e^t - t]\, y(s)\,ds = (t+e^t)(t-1)$.

85. Решение задачи 2: В соответствии с
86. изложенным выше способом решения
87. (см. строку 42), полагаем
88. $$x(t) = \frac{1}{1!}\int_0^t y(s)(t-s)\,ds + C_1 t + C_2,$$
89. где C_1 и C_2 – постоянные, которые мы уточним
90. по ходу решения задачи так, чтобы выпол-
91. нялись начальные условия (см. стр 79 и 80).
92. Стр. 79 $\Rightarrow$ $x(0) = 1$. С учетом стр. 88,
93. получаем $C_2 = 1$.
94. Стр 80 $\Rightarrow$ $x'(0) = -1$. Из стр 88 находим
95. $x'(t) = \int_0^t y(s)\,ds + C_1$. Значит, $C_1 = -1$.
96. Из стр. 95 получаем $x''(t) = y(t)$.
97. Подставляя $x(t)$, $x'(t)$ и $x''(t)$ из строк
98. 88, 95 и 96 в исходное диф-ое ур-ние (с.78)
99. получаем
100. $$y(t) - t\left[\int_0^t y(s)\,ds - 1\right] + e^t\left[\int_0^t y(s)(t-s)\,ds\right.$$
101. $$\left. - t + 1\right] = t^2,$$
102. т.е.
103. $$y(t) + \int_0^t [e^t(t-s) - t]\, y(s)\,ds = t^2 - t + e^t(t-1) =$$
104. $$= (t-1)(t+e^t).$$
105. Это ур-ние Вольтерра II рода

Теперь убедимся, что и наоборот иногда можно свести интегральное уравнение к дифференциальному (просто дифференцируя его почленно) и тем самым решить его.

Задача 3 Решить интегральное ур-ние, сведя его к дифференциальному

$$x(t) = e^t + \int_0^t x(s)\,ds.$$

Сделайте перерыв в просмотре видео и решите задачу сами.

Ответ: $x(t) = (t+1)e^t$.

Решение задачи 3: Дифференцируем ур-ние (112): $x'(t) = e^t + x(t)$. Это и есть искомое дифф-ое ур-ние. Чтобы найти для него начальное условие, подставим $t=0$ в (112); получим $x(0)=1$. Решаем однородное ур-ние, соответствующее (117): $x'(t) - x(t) = 0 \Rightarrow x(t) = Ce^t$, где C — некоторая постоянная.

Теперь решаем неоднородное ур-ние (117) методом вариации постоянной: $x(t) = C(t)e^t \Rightarrow$

$C'(t)e^t + \cancel{C(t)e^t} = e^t + \cancel{C(t)e^t} \Rightarrow C'(t) = 1 \Rightarrow$

$C(t) = t + a$, где a — некоторая постоянная.

Значит, $x(t) = C(t)e^t = (t+a)e^t$. При $t=0$ это дает $x(0)=a$. Учитывая, что $x(0)=1$ (см. 119), получаем $a=1$ и $x(t)=(t+1)e^t$.

130 **Задача 4**: Решить интегральное ур-ние

131 $$x(t)=\int_0^t e^{-(t-s)}x(s)\,ds+1,$$

132 сведя его к дифференциальному ур-нию.

133 | Сделайте паузу в просмотре видео

134 | и решите задачу сами.

135 **Ответ**: $x(t)=t+1$

136. **Решение задачи 4**: Дифференцируем (131):

137 $$x'(t) = -\int_0^t e^{-(t-s)}x(s)\,ds + 1\cdot x(t) \underset{\uparrow}{=}$$

138 поставляем (131)

139 $$= -\int_0^t e^{-(t-s)}x(s)\,ds + \int_0^t e^{-(t-s)}x(s)\,ds + 1 = 1.$$

140 Значит $x'(t)=1$ и $x(t)=t+C$, где C –

141 некоторая постоянная, значение которой ещё нужно

142 определить.

143. Подставив $t=0$ в (131), получим $x(0)=1$.

144. ~~Поэтому~~ С другой стороны, $x(0)=(t+C)\big|_{t=0}=C$.

145. Поэтому $C=1$ и $x(t)=t+1$.