146 Теперь обсудим как решать уравнения Фредгольма

147 II рода

148 $$x(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t)$$

149 с вырожденным ядром

150 $$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\,Q_j(s).$$

151 Из п. 8.3 лекций известно, что без ограничения общности
152 можно считать, что набор функций $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$
153 является линейно независимым (более того, можно
154 считать, что при этом и набор ф-ий $Q_1(s), \dots, Q_n(s)$
155 тоже является линейно независимым).

156 Подставив (150) в (148) получим

157 $$x(t) = \int_a^b \Big[\sum_{j=1}^{n} P_j(t)\,Q_j(s)\Big]x(s)\,ds + f(t) =$$

158 $$= \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \underbrace{\int_a^b Q_j(s)\,x(s)\,ds}_{= q_j} + f(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t).$$

159 Подставив (158) в (148) и приравняв коэффициенты
160 при одинаковых $P_j(t)$, мы получим линейную
161 алгебраическую систему ур-ний для нахождения коэф.
162 $q_1, q_2, \dots q_n$. Каждому решению этой системы
163 соответствует решение

164 $$x(t) = \sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t)$$

165 интегрального уравнения (148). Если же эта система
166 не имеет решений относительно $q_1, \dots, q_n$, то и
167 ур-ние (148) не имеет решений.

168 Продемонстрируем этот метод на простых

169 примерах.

170 <u>Задача 5</u> Найти все решения интегрального

171 уравнения Фредгольма II рода с вырожденным

172 ядром:

173 $$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos t\cdot\cos s\cdot x(s)\,ds + \sin t.$$

174 Сделайте паузу и решите

175 задачу сами.

176 <u>Ответ</u>: $x(t) = a\cos t + \sin t$, где a – произвольное число.

177. <u>Решение</u> задачи 5: В этой задаче

178 $K(t,s) = \frac{1}{\pi}\cos t\cdot\cos s$, т.е. $P_1(t) = \frac{1}{\pi}\cos t$; $Q_1(s) = \cos s$;

179. $n=1$ и $f(t) = \sin t$.

180 Очевидно, $$x(t) = \frac{1}{\pi}\cos t\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos s\cdot x(s)\,ds}_{=q_1} + \sin t = q_1 P_1(t) + f(t).$$

181. Подставив (180) в (173) получим

182 $$q_1\cdot\frac{1}{\pi}\cos t + \cancel{\sin t} = \frac{1}{\pi}\cos t\cdot\int_0^{2\pi}\cos s\left[\frac{1}{\pi}\cos s\cdot q_1 + \sin s\right]ds + \cancel{\sin t}$$

183 $$q_1\left(\frac{1}{\pi}\cos t\right) = \left(\frac{1}{\pi}\cos t\right)\left[q_1\cdot\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2 s\,ds}_{=\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos s\cdot\sin s\,ds}_{=0}\right]$$

184 $q_1 = q_1 \Rightarrow q_1$ – произвольное число.

185 Значит, всякая функция вида $x(t) = \frac{q_1}{\pi}\cos t + \sin t$

186 является решением ур-ния (173). Полагая $a = \frac{q_1}{\pi}$

187 получаем окончательный ответ:

188 $x(t) = a\cos t + \sin t$, где a – произвольное число.

189 Задача 6. Найти все решения уравнения

190 Фредгольма II рода с вырожденным ядром:

191 $$x(t)=\int_0^1 (2t-s)\,x(s)\,ds+\cos 2\pi t.$$

192 | Сделайте паузу и решите задачу сами.

193 Ответ: $x(t)=\cos 2\pi t$.

194 Решение задачи 6: Здесь $K(t,s)=2t-s$, т.е.

195 $n=2$, $P_1(t)=t$; $Q_1(s)=2$; $P_2(t)=1$; $Q_2(s)=-s$; $f(t)=$

196 $=\cos 2\pi t$.

197 Поэтому $x(t)=q_1P_1(t)+q_2P_2(t)+f(t)=q_1t+q_2+\cos 2\pi t$.

198 Подставив (197) в (191) получим

199 $$q_1t+q_2+\cancel{\cos 2\pi t}=2t\int_0^1\left(q_1s+q_2+\cos 2\pi s\right)ds-$$

200 $$-\int_0^1 s\left(q_1s+q_2+\cos 2\pi s\right)ds+\cancel{\cos 2\pi t}$$

201. Вычислим интегралы:

202 $$\int_0^1 s\,ds=\frac{1}{2}s^2\Big|_0^1=\frac{1}{2};\quad \int_0^1 ds=1;\quad \int_0^1\cos 2\pi s\,ds=0;$$

203 $$\int_0^1 s^2\,ds=\frac{1}{3}s^3\Big|_0^1=\frac{1}{3};\quad \int_0^1 s\cos 2\pi s\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 s\,d(\sin 2\pi s)=\frac{1}{2\pi}\Big[s\cdot\sin 2\pi s\Big|_0^1-$$

204 $$-\int_0^1\sin 2\pi s\cdot ds\Big]=0.$$

205 Поэтому уравнение (199)-(200) можно переписать так:

206 $$q_1t+q_2=2t\left(\frac{1}{2}q_1+q_2\right)-\left(\frac{1}{3}q_1+\frac{1}{2}q_2\right)$$

207. Приравнивая коэффициенты при t и 1 (т.е. при

208 $P_1(t)$ и $P_2(t)$), получаем

209 $$\begin{cases}q_1=q_1+2q_2\\ q_2=-\frac{1}{3}q_1-\frac{1}{2}q_2\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}q_2=0\\ q_1=0.\end{cases}\quad \text{Из } (197)\Rightarrow x(t)=\cos 2\pi t.$$

210