(2.9) Равенство Парсеваля

<u>Теорема</u> (рав-во Парсеваля): Пусть $n \geq 1$ и $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{\pm}[f](y) \cdot \overline{\mathcal{F}_{\pm}[g](y)}\,dy,$$

где черта означает комплексное сопряжение.

<u>Д-во</u>: Шаг I $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}_{\pm}[g](x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{\pm}[f](x)g(x)\,dx$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{\mp i(y,x)}\,dy\right]dx = \text{(меняем порядок интегрования)} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\left[(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{\mp i(y,x)}\,dx\right]dy.$$

Шаг II: $\overline{\mathcal{F}_{\pm}[f](x)} = \mathcal{F}_{\mp}[\overline{f}](x)$

$$\overline{(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{\mp i(x,y)}\,dy} = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(y)}\,e^{\pm i(x,y)}\,dy$$

Шаг III: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx \overset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{\mp}\left[\mathcal{F}_{\pm}[f]\right](x)\,\overline{g(x)}\,dx =$

формула обращения

$$\overset{\text{I}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{\pm}[f](y)\,\mathcal{F}_{\mp}[\overline{g}](y)\,dy \overset{\text{II}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{\pm}[f](y)\,\overline{\mathcal{F}_{\pm}[g](y)}\,dy.$$

ЧТД.

Замечание: Рав-во Парсеваля для преобразования Фурье аналогично рав-ву Ляпунова для рядов Фурье. В самом деле, при $f = g$ и $n = 1$ рав-во Парсеваля даёт

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(y)|^2 dy,$$

что очень похоже на равенство Ляпунова:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2,$$

где $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ - коэффициенты ряда Фурье ф-ии f в комплексной форме.