(2.10) Дальнейшие свойства преобразования Фурье

Опр. Пусть $n \geqslant 1$ и $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. Функция $f * g$, заданная формулой $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$ называется свёрткой ф-ий f и g.

Замечание. Свёртка оказывается полезной при изучении дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистике, обработке сигналов.

Св-ва свёртки (здесь $f, g, h \in S(\mathbb{R}^n)$):

1) $f*g = g*f$ — коммутативность;
2) $(f*g)*h = f*(g*h)$ — ассоциативность;
3) $\forall a, b \in \mathbb{C}$ $(af+bg)*h = a(f*h) + b(g*h)$ — линейность;
4) $\forall \alpha$ - мультииндекс $\mathcal{D}^\alpha(f*g) = (\mathcal{D}^\alpha f)*g = f*(\mathcal{D}^\alpha g)$ — правило диф-ия свёртки;
5) $\mathcal{F}_\pm[f*g] = (2\pi)^{n/2}\, \mathcal{F}_\pm[f] \cdot \mathcal{F}_\pm[g]$ — преобразование Фурье переводит свёртку в умножение (с точностью до постоянного множителя) ... и наоборот:
6) $\mathcal{F}_\pm[f \cdot g] = (2\pi)^{-n/2}\, \mathcal{F}_\pm[f] * \mathcal{F}_\pm[g]$.

Замечание: Корректность определения (т.е. сходимость интеграла, задающего свёртку) и д-ва св-в 1)–4) оставляю слушателям в качестве лёгкого упражнения: для его решения нужно пользоваться лемодфантой из определения б.у. ф-ии и т-мы о перестановке порядка интегрирования и дифференцирования интеграла по параметру.

Докажем св-во 5):

$$\mathcal{F}_{\pm}[f*g](x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(y)\, e^{\mp i(x,y)}\,dy =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\,g(z)\,dz\right] e^{\mp i(x,y)}\,dy =$$

меняем порядок интегрирования

$$= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\,e^{\mp i(x,y)}\,dy\right] g(z)\,dz =$$

замена $y-z=t$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\,\underbrace{e^{\mp i(x,t+z)}}_{=\,e^{\mp i(x,t)}\cdot e^{\mp i(x,z)}}\,dt\right] g(z)\,dz =$$

$$= (2\pi)^{n/2}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left[(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\,e^{\mp i(x,t)}\,dt\right] g(z)\,e^{\mp i(x,z)}\,dz =$$

$$= (2\pi)^{n/2}\,\mathcal{F}_{\pm}[f](x)\cdot\mathcal{F}_{\pm}[g](x).$$ ЧТД.

Св-во 6) может быть доказано аналогично св-ву 5). Но мы докажем его по-другому. Применим св-во 5) к ф-иям $\mathcal{F}_{\mp}[f]$ и $\mathcal{F}_{\mp}[g]$:

$$\mathcal{F}_{\pm}\left[\mathcal{F}_{\mp}[f]*\mathcal{F}_{\mp}[g]\right] = (2\pi)^{n/2}\,\mathcal{F}_{\pm}\left[\mathcal{F}_{\mp}[f]\right]\cdot\mathcal{F}_{\pm}\left[\mathcal{F}_{\mp}[g]\right] =$$

ф-ла обращения

$$= (2\pi)^{n/2}\, f\cdot g.$$

Подействовав на это равенство $\mathcal{F}_{\mp}$ и воспользовавшись ф-лой обращения, получаем

$$\mathcal{F}_{\mp}[f] * \mathcal{F}_{\mp}[g] = (2\pi)^{1/2}\ \mathcal{F}_{\mp}[f \cdot g]$$

Остаётся поделить обе части на $(2\pi)^{1/2}$ и св-во 6) доказано.

<u>Замечание</u> Св-ва 5) и 6) дают ещё одно объяснение важности (или фундаментальности) операции свёртки: с точностью до преобразования Фурье свёртка и есть умножение.

Ещё два свойства без док-ва:

<u>Т-ма</u> (формула Пуассона): $\forall f \in S(\mathbb{R})$ имеем

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n).$$

<u>Т-ма</u> (ф-ла Котельникова - Шеннона):
Пусть $f \in S(\mathbb{R})$ и $\exists a > 0 : \hat{f}(x) = 0 \ \forall x : |x| > a$
Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ имеем

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi n}{a}\right) \operatorname{sinc}\left(a\left(x - \frac{\pi n}{a}\right)\right), \text{ где}$$

$\operatorname{sinc}(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ - функция отсчётов;
$\dfrac{\pi n}{a}$ - точка отсчёта.

<u>Замечание</u>: Все утверждения п. 2.10 являются мат. основой теории передачи сигналов.