§3. Преобразование Лапласа

3.1 Определение и основные свойства преобразования Лапласа

__Опр. 1__: Функция $f: [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ называется оригиналом, если

(1) f непрерывна всюду, кроме, быть может, конечного числа точек;

(2) $\exists a \in \mathbb{R}: \int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at} dt < +\infty$.

__Опр. 2__: Пусть f - оригинал. Число

$$\inf \left\{ a \in \mathbb{R} : \int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at} dt < +\infty \right\}$$

называется показателем роста функции f и обозначается $a(f)$.

__Замечание__: Мн-во $\left\{ a \in \mathbb{R} : \int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at} dt < +\infty \right\}$ является ~~ин~~ непустым интервалом в $\mathbb{R}$, т.к. если a принадлежит этому мн-ву, то любое число $b > a$ тоже принадлежит этому мн-ву:

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-bt} dt \leqslant \int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at} dt < +\infty.$$

Инфимум непустого интервала равен его левому концу (и не важно принадлежит этот левый конец интервалу или нет); но в любом случае $\forall \varepsilon > 0$ число $a(f) + \varepsilon$ принадлежит мн-ву $\left\{ a \in \mathbb{R} \,\middle|\, \int\limits_0^{+\infty} |f(t)| e^{-at} dt < +\infty \right\}$.

Опр. 3: Пусть $f: [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ - оригинал.
$\forall p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p > a(f)$ построим новую функцию

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \qquad (*)$$

Говорят, что $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, или что функция $F(p)$ является преобразованием Лапласа ф-ии $f(t)$.

Обозначение: $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p)$ или $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Замечание: Если $\operatorname{Re} p > a(f)$, то интеграл (*) сходится: $\left|\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt\right| \le \int_0^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-pt}| dt =$

$$= \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-(\operatorname{Re} p)t} dt < \qquad e^{-(\operatorname{Re} p)t} \cdot e^{-i(\operatorname{Im} p)t}.$$

$$< \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-[a(f)+\varepsilon]t} dt < +\infty.$$

Если $\operatorname{Re} p > a(f)$, то $\exists \varepsilon > 0: \operatorname{Re} p > a(f) + \varepsilon$

Опр. 4: Преобразованием Лапласа называют такое самое правило (отображение), сопоставляющее оригиналу $f(t)$ изображение $F(p)$ с помощью формулы (*).

Св-ва преобразования Лапласа (здесь f и g - оригиналы, а св-ва надо читать так: „если существуют преобразования Лапласа, стоящие и в левой, и в правой частях равенства, то это равенство имеет место"):

1) (линейность): $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имеем

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\}.$$

Д-во: $\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(p) = \int_0^{+\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-pt} dt =$

$$= \alpha \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \alpha \mathcal{L}\{f\}(p) + \beta \mathcal{L}\{g\}(p).$$

<u>Замечание</u>: Для св-ва 1) легко указать условие его применимости: $\mathrm{Re}\, p > \max\{a(f), a(g)\}$.

2) (Теорема смещения): $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ имеем

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}(p+\alpha).$$

Д-во: $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-pt} dt =$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p+\alpha)t} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(p+\alpha).$$

<u>Замечание</u>: Для св-ва 2) тоже легко указать условие его применимости: $\mathrm{Re}(p+\alpha) > a(f)$, т.е. $\mathrm{Re}\, p > a(f) - \mathrm{Re}\,\alpha$.

3) (Теорема о дифференцировании оригинала):

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) = p\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

Д-во: $\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt =$ по частям

$$= f(t) e^{-pt}\Big|_{t=0}^{t\to\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-pt} - \lim_{t\to 0+} f(t)e^{-pt} + p\,\mathcal{L}\{f(t)\}(p).$$

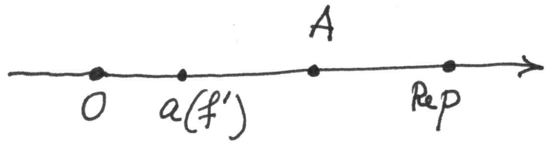
$$\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-pt} \overset{(а)}{=} 0, \qquad \lim_{t\to 0+} f(t)e^{-pt} \overset{(б)}{=} f(0)$$

Если докажем эти рав-ва, то св-во 3) будет доказано.

(б) По условию f' является оригиналом, т.е. f' определена на $[0,+\infty)$. Значит ф-ция f диф-ма в 0. Из мат. анализа $\Rightarrow$ если ф-ция диф-ма в точке, то она непрерывна в этой точке. Следовательно, f непрерывна в нуле. Значит, $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)e^{-pt} =$

$$= \lim_{t\to 0+} f(0) \cdot \lim_{t\to 0+} e^{-pt} = f(0).$$

ⓐ Будем предполагать $\operatorname{Re} p > a(f')$ и $\operatorname{Re} p > 0$.



Выберем вспомогательное число A так, чтобы

$A > 0$, $A > a(f')$ и $A < \operatorname{Re} p$.

Тогда $$\lim_{t\to+\infty}\left|f(t)e^{-pt}\right| = \lim_{t\to+\infty}\left|e^{-pt}\left[\int_0^t f'(s)\,ds + f(0)\right]\right| \leq$$

$$\leq \lim_{t\to+\infty}\left|e^{-pt}\right|\cdot\int_0^t\left|f'(s)\right|ds + \lim_{t\to+\infty}\left|e^{-pt}\right|\cdot\left|f(0)\right| =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{-(\operatorname{Re} p)t}\cdot e^{At}\cdot e^{-At}\int_0^t\left|f'(s)\right|ds + \underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{-(\operatorname{Re} p)t}\cdot\left|f(0)\right|}_{=\,0,\ \text{т.к. } \operatorname{Re} p>0} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{-[(\operatorname{Re} p)-A]t}\cdot\int_0^t\left|f'(s)\right|\underbrace{e^{-At}}_{\leq\, e^{-As}}ds \leq$$

т.к. $s \leq t$ и $A > 0$; а значит $As \leq At$, $-As \geq -At$, $e^{-As} \geq e^{-At}$.

$$\leq \underbrace{\left\{\lim_{t\to+\infty} e^{-[(\operatorname{Re} p)-A]t}\right\}}_{=\,0,\ \text{т.к. } \operatorname{Re} p > A}\cdot\underbrace{\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\left|f'(s)\right|e^{-As}ds}_{=\int_0^{+\infty}\left|f'(s)\right|e^{-As}ds\ <\ +\infty,\ \text{т.к. } A > a(f')} = 0.$$

ЧТД.

4) (Теорема подобия). $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0$ имеем

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(p) = \frac{1}{\alpha}\,\mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Док-во: $\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(\alpha t)\, e^{-pt}\, dt =$

замена $\alpha t = y$

$$= \int\limits_0^{+\infty} f(y)\, e^{-\frac{p}{\alpha} y}\, \frac{dy}{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\, \mathcal{L}\{f(y)\}\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$ ЧТД.