Лекция 12 (23 ноября)

§4. Обобщённые функции

В мат. анализе: функция ставит в соответствие каждому значению аргумента x единственное значение функции $f(x)$.

В ТФКП: бывают многозначные ф-ии, напр. $\operatorname{Ln} z$, которые значению аргумента z сопоставляют несколько значений ф-ии.

В §4 мы познакомимся с понятием обобщённой функции, т.е. «функции", которая вообще не имеет значения в отдельно взятой точке. И эта точка зрения весьма близка физикам: опыт Резерфорда, дельта-функция Дирака

(4.1) Пространство основных функций

Из мат. анализа:

<u>Опр</u> Открытый шар в $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\} = B(x_0, r)$ - открытый шар с центром $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $r \geq 0$. Здесь $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_0 = (x_{01}, \ldots x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$, $|x - x_0| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - x_{0k}|^2}$ - расстояние между точками x и x_0.

<u>Опр</u>. Мн-во $G \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся открытым, если $\forall x \in G$ $\exists r > 0 : B(x, r) \subset G$, т.е. если вместе с каждой своей точкой G содержит и некоторый шар положительного радиуса с центром в этой точке.

<u>Опр</u> Мн-во $G \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся связным, если любые две точки $x, y \in G$ можно соединить непрерывной кривой, все точки которой лежат в G.

Опр. Мн-во $G \subset \mathbb{R}^k$ наз-ся ограниченным, если $\exists x \in \mathbb{R}^k$ и $\exists\, 0 < r < +\infty$: $G \subset B(x, r)$.

Примеры:

Мн-во G	Открытое?	Связное?	Ограничено?
$\mathbb{R}^k$	да	да	нет
$\{x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$	да	да	нет
$B(x, r) \subset \mathbb{R}^k$	да	да	да
$[0, 1) \subset \mathbb{R}$	нет	да	да
$(0,1) \cup (2,3) \subset \mathbb{R}$	да	нет	да
$\varnothing$	Упр.	Упр.	Упр.

Опр. Предельной точкой мн-ва $G \subset \mathbb{R}^k$ наз-ся точка $x_0 \in \mathbb{R}^k$, если существует последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ из $\mathbb{R}^k$ такая, что (а) $\forall k \neq m$ $x_k \neq x_m$; (б) $\forall k$ $x_k \in G$; (в) $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$, т.е. $|x_k - x| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Опр. Замыканием мн-ва $G \subset \mathbb{R}^k$ наз-ся объединение мн-ва G и мн-ва всех его предельных точек.
Обоз. $\mathrm{cl}\, G$ или $\overline{G}$.

Пример $G = (0,1) \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathrm{cl}\, G = [0, 1]$.
Докажем, например, что 0 явл. предельной точкой мн-ва G. Положим $x_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$ Св-ва (а)–(в) из определения предельной точки выполнены. Поэтому 0 явл. предельной точкой. Аналогично и 1 явл. предельной точкой.

Опр. Мн-во $G \subset \mathbb{R}^k$ наз-ся замкнутым, если $G = \mathrm{cl}\, G$.

Опр. Область — это открытое связное мн-во.

На этом воспоминания из мат. анализа закончены. Переходим к изучению новых понятий.

Опр. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi : G \to \mathbb{C}$ — ф-ция. Носителем функции φ называют мн-во

$$\mathrm{cl}\,\{x \in G \mid \varphi(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots x_k, \dots \in \mathbb{R}^n :$$

$$(\text{а})\ x_k \neq x_m\ \forall k \neq m;\ (\text{б})\ x_k \underset{k\to\infty}{\to} x;\ (\text{в})\ \varphi(x_k) \neq 0\ \forall k\} =$$

$\overset{\text{обоз}}{=} \operatorname{supp} \varphi$ от англ. слова support ≡ носитель.

Пример: $G = (0,1)$, $\varphi(x) = 1$ $\forall x \in G$. Тогда $\operatorname{supp}\varphi = [0,1]$. Видим, что $\operatorname{supp}\varphi \not\subset G$.

Опр. Пусть G — обл. в $\mathbb{R}^n$, $\varphi : G \to \mathbb{C}$. Ф-ция φ наз-ся основной (или пробной), если выполняются следующие условия: (i) $\varphi \in C^\infty(G)$ и (ii) $\operatorname{supp}\varphi \subset G$, причем является ограниченным мн-вом.

Контрпример: $G = (0,1)$; $\varphi \equiv 1$ не явл. пробной в G, хотя и бесконечно дифф-ма.

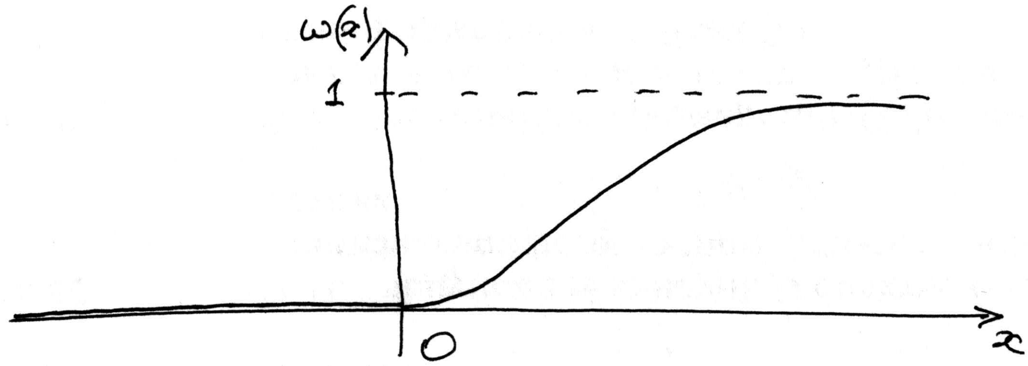
Пример: $G = (0,1)$; $\varphi \equiv 0$. Тогда $\operatorname{supp}\varphi = \varnothing$ и φ — пробная.

Вопрос: Бывают ли менее тривиальные пробные ф-ции. Ответ: да.

Воспоминания (~~до~~ или упражнения) из мат. анализа:

Пусть $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — отображение, заданное ф-лой

$$\omega(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$



Из мат. анализа $\Rightarrow \ \omega \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Идея д-ва: по индукции вычисляем, что $\forall k$

$$\frac{d^k\omega}{dx^k} = \begin{cases} P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}, & \text{если } x>0 \\ 0, & \text{если } x<0 \end{cases}$$

Значит, ω бесконечно диф-ма $\forall x \neq 0$.

Производные в $x=0$ вычисляем тоже по индукции:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{d^k\omega}{dx^k}(x) - \frac{d^k\omega}{dx^k}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 0,$$

значит, существует правая $(k+1)$-я производная ф-ии ω в $x=0$ и она равна 0;

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\frac{d^k\omega}{dx^k}(x) - \frac{d^k\omega}{dx^k}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{0-0}{x-0} = 0,$$

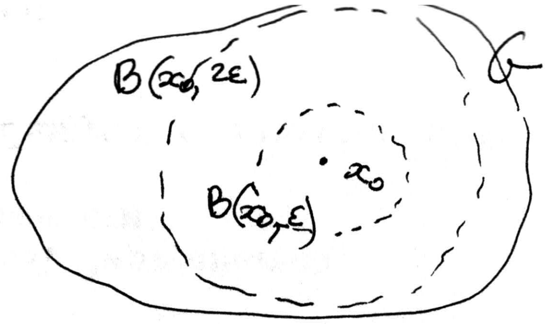
значит существует левая $(k+1)$-я производная ф-ии ω в т. $x=0$ и она тоже равна 0.

Значит, существует $(k+1)$-я производная ф-ии ω в т. $x=0$ и она равна 0.

Функция ω возникала (или могла возникнуть) в мат. анализе как пример бесконечно диф-ой ф-ии, ряд Тейлора которой в т. $x=0$ не сходится к значению ф-ии $\omega(x)$ ни в какой окрестности этой точки:

$$0 \underset{\text{если } x>0}{<} \omega(x) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{d^k\omega}{dx^k}(0)}_{=0} x^k = 0$$

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $B(x_0, 2\varepsilon) \subset G$. Зададим ф-ию $\omega_{x_0,\varepsilon} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ формулой:



$$\omega_{x_0,\varepsilon}(x) = \omega\left(\varepsilon^2 - |x - x_0|^2\right).$$

$\omega_{x_0,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ как суперпозиция двух C^∞-ф-ий: ω и многочлена $\varepsilon^2 - |x - x_0|^2$.

$\operatorname{supp} \omega_{x_0,\varepsilon} \subset \operatorname{cl} B(x_0, \varepsilon) \subset B(x_0, 2\varepsilon) \subset G$, т.е. носитель является ограниченным мн-вом, содержащимся в G.

Следовательно, $\omega_{x_0,\varepsilon}$ — пробная ф-ия.

Поскольку $x_0 \in G$ и $\varepsilon > 0$ произвольны (или во многом произвольны), то ф-ий $\omega_{x_0,\varepsilon}$ очень много.

<u>Замечание</u>. Если φ_1 и φ_2 — пробные ф-ии в G, то $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ф-ия $a\varphi_1 + b\varphi_2$ явл. пробной в G, т.е. совокупность всех пробных ф-ий в G образует линейное пр-во. Его обозначают $\mathcal{D}(G)$.

<u>Опр</u>. Говорят, что пробные ф-ии $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots : G \to \mathbb{C}$ сх-ся к пробной ф-ии $\varphi : G \to \mathbb{C}$, если

1) $\forall \alpha$-мульт. $\mathcal{D}^\alpha \varphi_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} \mathcal{D}^\alpha \varphi$ в G, т.е. если
$$\sup_{x \in G} |\mathcal{D}^\alpha \varphi_k(x) - \mathcal{D}^\alpha \varphi(x)| \underset{k\to\infty}{\to} 0;$$
2) $\exists$ ограниченное замкнутое мн-во $M \subset G$ такое, что $\forall k$ $\operatorname{supp} \varphi_k \subset M$.

<u>Обоз</u>. $\varphi_k \underset{k\to\infty}{\to} \varphi$ в $\mathcal{D}(G)$ или $\varphi = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k$ в $\mathcal{D}(G)$.