(4.2) Пространство обобщённых функций. Примеры обобщённых функций.

Опр. Всякое отображение во мн-во чисел (вещественных или комплексных) называется функционалом.

Обоз. Если $F: \mathcal{D}(G) \to \mathbb{C}$ - функционал, то его значение на пробной ф-ии φ будем обозначать через $F(\varphi)$ или (F, φ).

Опр Функционал $F: \mathcal{D}(G) \to \mathbb{C}$ называется линейным, если $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(G)$ и $\forall a, b \in \mathbb{C}$ справедливо равенство $F(a\varphi_1 + b\varphi_2) = a F(\varphi_1) + b F(\varphi_2)$.

Опр Функционал $F: \mathcal{D}(G) \to \mathbb{C}$ называется непрерывным, если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ и любой последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots$ ф-ий из $\mathcal{D}(G)$ из того, что $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi$ в $\mathcal{D}(G)$ следует, что $F(\varphi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} F(\varphi)$.

Замечание (эвристическое соображение): Если линейный ф-ал определён на любой ф-ии из $\mathcal{D}(G)$ и задан явной ф-лой, то он непрерывен.

Опр. Линейный непрерывный функционал $F: \mathcal{D}(G) \to \mathbb{C}$ называется обобщённой функцией в $G \subset \mathbb{R}^n$.

Обоз. $\mathcal{D}'(G)$ - совокупность всех обобщённых функций в $G \subset \mathbb{R}^n$.

Примеры обобщённых ф-ий

(1) (Регулярная обобщённая функция)

Опр (из мат. анализа). Пусть G - область в $\mathbb{R}^n$ и $f: G \to \mathbb{C}$. Говорят, что f принадлежит пр-ву $L_{1,loc}(G)$, если $\forall x_0 \in G$ $\exists \varepsilon = \varepsilon(x_0) > 0$: $\int\limits_{G \cap B(x_0, \varepsilon)} |f(x)|\, dx < +\infty$. Другими словами: $f \in L_{1,loc}(G) \Leftrightarrow f$ локально абсолютно интегрируема.

Примеры: (i) $f(x) \equiv 1 \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$, но $f \notin L_1(\mathbb{R})$

(ii) $f(x) = \ln x \in L_{1,loc}(0,+\infty)$, но $f \notin L_1(\mathbb{R})$.

Опр. Для каждой ф-ии $f: G \to \mathbb{C} \in L_{1,loc}(G)$ построим обобщённую функцию $\{f\}$ по следующему правилу:

$$(\{f\}, \varphi) = \int_G f(x)\varphi(x)dx. \quad (*)$$

Докажем, что интеграл $(*)$ сх-ся $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$.

I шаг φ - пробная ф-ия $\Rightarrow$ $\operatorname{supp}\varphi$ - огранич. замкнутое мн-во в $\mathbb{R}^n$. Такие мн-ва называют компактными. Из мат-анализа известна т-ма Вейерштрасса „всякая непрерывная ф-ия на компакте достигает своего максимального значения". Поэтому

$$\sup_{x\in G}|\varphi(x)| = \sup_{x\in \operatorname{supp}\varphi}|\varphi(x)| = |\varphi(x_0)| < +\infty, \text{ где } x_0 \in \operatorname{supp}\varphi_G.$$

Другими словами: $\exists\, C = const < +\infty$ такое, что $|\varphi(x)| \le C \quad \forall x \in G$.

II шаг Теперь используем другое важное св-во компактного множества: „из всякого открытого покрытия компактного мн-ва можно выделить конечное подпокрытие". Мы знаем, что $\forall x_0 \in \operatorname{supp}\varphi$ $\exists\, \varepsilon = \varepsilon(x_0) > 0$: $\int\limits_{G\cap B(x_0,\varepsilon(x_0))} |f(x)|dx < +\infty$. Очевидно, объединение шаров $B(x_0, \varepsilon(x_0))$ является открытым покрытием мн-ва $\operatorname{supp}\varphi$: $\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup\limits_{x_0\in\operatorname{supp}\varphi} B(x_0,\varepsilon(x_0))$.

Значит из него можно выбрать конечное подпокрытие:
$\{B(x_j, \varepsilon(x_j))\}_{j=1,\dots,k}$ такое, что $\bigcup\limits_{j=1}^{k} B(x_j, \varepsilon(x_j)) \supset \operatorname{supp}\varphi$.

III шаг. Убедимся, что интеграл (*) сходится абсолютно:

$$\int\limits_G |f(x)\varphi(x)|\,dx \leq C \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi} |f(x)|\,dx \leq C \int\limits_{\bigcup\limits_{j=1}^{k} B(x_j,\varepsilon(x_j))} |f(x)|\,dx \leq$$

$$\leq C\sum_{j=1}^{k} \underbrace{\int\limits_{B(x_j,\varepsilon(x_j))} |f(x)|\,dx}_{\neq +\infty} < +\infty.\quad \text{ЧТД.}$$

Замечание. В принципе, используя подобные рассуждения и подходящую т-му о предельном переходе под знаком интеграла, можно д-ть, что ф-ла (*) задаёт непрерывный ф-ал. Но мы этого делать не будем, а сошлёмся на наше „физическое" соображение. Итог: ф-ал $(\{f\}, \varphi) = \int\limits_G f(x)\varphi(x)\,dx$ является линейным непрерывным ф-алом, т.е. обобщённой ф-ей. Она и называется регулярной обобщённой ф-ей.

(2) Дельта-функция Дирака: $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

Докажем линейность: $\delta(a\varphi_1 + b\varphi_2) = (a\varphi_1 + b\varphi_2)(0) =$
$= a\varphi_1(0) + b\varphi_2(0) = a\delta(\varphi_1) + b\delta(\varphi_2)$.

Докажем непрерывность: пусть $\varphi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, т.е. $\forall\alpha$-мульт. $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |D^\alpha\varphi_k(x) - D^\alpha\varphi(x)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Тогда

$$|\delta(\varphi_k) - \delta(\varphi)| = |\delta(\varphi_k - \varphi)| = |(\varphi_k - \varphi)(0)| = |\varphi_k(0) - \varphi(0)| \underset{\alpha=0}{\leq}$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$ Значит $\delta(\varphi_k) - \delta(\varphi) \to 0$, т.е. $\delta(\varphi_k) \to \delta(\varphi)$, что и означает непр.

Замечание δ-ф-ия не является регулярной обобщённой функцией! Т.е. не существует „обычной" ф-ии $\Delta(x) \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ такой, что $\delta(x) = \{\Delta(x)\}$, т.е. такой, что $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ выполняется равенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x)\varphi(x)\,dx = (\delta, \varphi) = \varphi(0)$.

(3) $$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0+ \\ R \to +\infty}} \left[\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right].$$

Замечание $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ не является регулярной обобщённой ф-ей!

Упр. Докажите, что $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ справедливо рав-во

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,dx.$$

(4) $$\left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\,dx$$

Замеч. $\frac{1}{x \pm i0}$ не явл. регулярной обобщённой ф-ей!