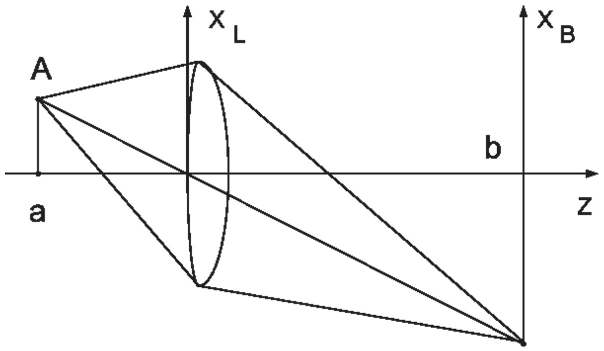

Решение задачи о дифракции на линзе

Рассмотрим задачу о получении изображения точки A, которая находится слева от плоскости линзы на расстоянии a. Найдем поле в плоскости линзы (перед линзой).

$$E(x_L, y_L, 0) = \frac{k}{2\pi iz} \iint_S E(S) \exp\left\{i\left(kz - \omega t + k\frac{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2}{2z}\right)\right\} dxdy,$$

здесь z — расстояние от плоскости интегрирования (предмета) до линзы. В нашем случае $z = a$, а поле $E(S)$ в плоскости предмета $E(S) = E_0 S_0 \delta(x - x_A)\delta(y)$. Тогда после интегрирование по плоскости изображения получим

$$E(x_L, y_L, 0) = \frac{kS_0}{2\pi ia} E_0 \exp\left\{ik\left(a + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a}\right)\right\}.$$

Поле в плоскости $z = b$ определяется фазовым множителем линзы и интегралом Кирхгофа по апертуре линзы.

$$E_b = \frac{k}{2\pi ib} e^{ikb} \iint_D E(x_L, y_L, 0) \exp\left\{ik\frac{(x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2}{2b} - ik\frac{x_L^2 + y_L^2}{2F} dx_L dy_L\right\}$$

Подставив выражение для $E(x_L, y_L, 0)$, получим

$$E_b = -\frac{k^2 S_0}{4\pi^2 ab} E_0 \iint_D e^{i\varphi(x_L, y_L)} dx_L dy_L,$$

где

$$\varphi(x_L, y_L) = k\left\{(a+b) + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a} + \frac{(x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2}{2b} - \frac{x_L^2 + y_L^2}{2F}\right\}.$$

$$\varphi(x_L, y_L) = k(a+b) - k \cdot x_L\left\{\frac{x_A}{a} + \frac{x_B}{b}\right\} - k \cdot y_L \frac{y_B}{b} + \frac{k}{2}\left\{\frac{x_B^2 + y_B^2}{b} + \frac{x_A^2}{a}\right\}$$

Квадратичные по x_L и y_L члены выражения взаимно сократились в связи с тождеством $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$.

После вычисления интеграла по аппертуре линзы (считая линзу квадратной, $\pm D/2$ по обеим координатам), и вычисления квадрата модуля амплитуды, получим для интенсивности в плоскости $z = b$

$$I_B = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{k^2 S_0}{4\pi^2 ab} D^2 E_0\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin U_x}{U_x}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin U_y}{U_y}\right)^2,$$

где

$$U_x = \frac{kD}{2}\left(\frac{x_A}{a} + \frac{x_B}{b}\right); \;\; U_y = \frac{kD}{2} \cdot \frac{y_B}{b}.$$

Из приведенного результата видно, что максимум интенсивности изображения приходится на точку, в которой $U_x = U_y = 0$; $x_{B0} = -x_A/a * b$; $y_{B0} = y_A = 0$, что соответствует законам геометрической оптики. А «размытие» пятна точечного источника определяется соотношением $U_x \sim U_y \sim \pi$, что соответствует $\triangle x_B \sim \triangle y_B \sim \frac{\lambda}{D} b$.