5. ИЗЛУЧЕНИЕ

Урок 18

Дипольное излучение При наличии токов и зарядов потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{array}{rl} \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, & \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \Box\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -4\pi\mu\mathbf{j}/c, & \Box\varphi(\mathbf{r},t) = -4\pi\rho(\mathbf{r},t)/\varepsilon. \end{array} \tag{1}$$

Калибровочное условие

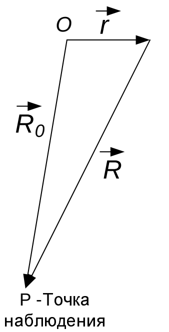
$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Решение приведенной выше системы неоднородных линейных уравнений есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Определим это частное решение

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}(x,y,z,t) & = & \frac{\mu}{c}\int \frac{\mathbf{j}(x',y',z',t-\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}R)}{R}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z', \\ \varphi(x,y,z,t) & = & \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho(x',y',z',t-\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}R)}{R}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z', \end{array} \tag{2}$$

где $R = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}$.

Пусть система зарядов находится в ограниченной области вокруг точки O (см. рис.) и $\mathbf{r}$ вектор в какой нибудь из зарядов. Пас интересует поле в точке на расстоянии $R_0 \gg r$ много большем характерного размера этой области. Тогда можно записать $R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| \approx R_0 - \mathbf{nr}$. Подставив это приближение в (2), можно записать приближенные выражения для скалярного и векторного потенциала



$$\varphi = \frac{1}{R_0}\int \rho_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}} dV,$$
$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}} dV.$$

Если поле можно рассматривать как плоскую волну (для этого необходимо не только $R_0 \gg r$, но и $R_0 \gg \lambda$), то это волновая зона и для нее справедливы соотношения плоской волны

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\left[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}\right], \;\; \mathbf{E} = \frac{1}{c}\left[\left[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}\right]\mathbf{n}\right].$$

Временным запаздыванием $\mathbf{rn}/c$ можно пренебречь, если распределение зарядов за это время мало меняется. Пусть $T-$характерное время изменения распределения заряда. Излучение будет обладать этим же периодом ($\omega \sim 1/T$), $a-$ характерный размер системы, т.е. $\mathbf{rn}/c \sim a/c$. Требуется чтобы система изменялась мало

$$\frac{a}{c} \ll T, \;\; a \ll cT, \;\; a \ll \lambda, \;\; T \sim a/v, \;\; \lambda \sim ca/v, \rightarrow \; v \ll c.$$

В волновой зоне

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'} dV, \; \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}, \; t' = t - R_0/c.$$

Для системы дискретных зарядов

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \sum e\mathbf{v}, \; \sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}}, \; \text{все при } t'.$$

Окончательно получаем расчетные формулы для дипольного приближения

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}}, \; \mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} \left[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}\right], \; \mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} \left[\left[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}\right] \mathbf{n}\right].$$

5.1. (Задача 4.7.) Найти: а) угловое распределение интенсивности излучения $\frac{dI}{d\theta}$ от диполя; б) полное излучение $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ от дипольного излучателя.

Решение

Интенсивность излучения в телесный угол $\mathrm{d}\Omega$ определяется как количество энергии, протекающее в единицу времени через элемент площади $\mathrm{d}f = R_0^2 \mathrm{d}\Omega$. Поток энергии определяется вектором Пойнтинга

$$S = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] = \frac{c}{4\pi} [[\mathbf{Hn}]\mathbf{H}] = c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n}.$$

Тогда интенсивность

$$\mathrm{d}I = c\frac{H^2}{4\pi} R_0^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} \left[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}\right]^2 \mathrm{d}\Omega.$$

Выбирая ось z вдоль направления $\ddot{\mathbf{d}}$, можно записать

$$\mathrm{d}I = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^3\theta 2\pi \mathrm{d}\theta.$$

Или другими словами

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\sin^3\theta}{2c^3} \left| \ddot{\mathbf{d}} \left(t - \frac{R_0}{c}\right) \right|^2.$$

Поскольку полный поток энергии (во все стороны) равен изменению энергии системы

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -I = \frac{-1}{2c^3} |\ddot{\mathbf{d}}|^2 \int\limits_0^\pi \sin^2\theta \mathrm{d}\cos\theta = -\frac{2}{3}\frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{c^3}.$$

5.2. (Задача 4.9.) Заряд движется с малой скоростью $\mathbf{v}$ и ускорением $\dot{\mathbf{v}}$ в ограниченной области размера a. Найти электромагнитное поле частицы в точках, расстояние до которых $r \gg a$. Определить границы квазистационарной и волновой зон.

Решение Точное выражение для потенциалов одиночного движущегося заряда (потенциалы Лиенара-Вихерта, см., например, Мешков, Чириков, часть 2, стр. 119) имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{e}{R}\frac{1}{1-\frac{\mathbf{vR}}{cR}},\ \mathbf{A} = \varphi\frac{\mathbf{v}}{c}.$$

Тогда электрическое и магнитное поля выражаются следующим образом

$$\mathbf{E} = \frac{e\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right) + \frac{e}{c^2\left(R-\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left[\mathbf{R}\left[\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)\dot{\mathbf{v}}\right]\right]$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R}\left[\mathbf{RE}\right]$$

Нерелятивистское приближение (с точностью до членов $\frac{v}{c}$)

$$\mathbf{E} = \frac{e}{\left(R^3-3R^2\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right) + \frac{e}{c^2\left(R^3-3R^2\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)}\left\{\left[\mathbf{R}\left[\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}\right]\right] - R\left[\mathbf{R}\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\dot{\mathbf{v}}\right]\right]\right\} =$$
$$= \frac{e}{\left(R^3-3R^2\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)}\mathbf{R} - \frac{e\frac{\mathbf{v}}{c}R}{R^3} + \frac{e}{c^2}\frac{\left[\mathbf{R}\left[R\dot{\mathbf{v}}\right]\right]}{\left(R^3-3R^2\frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)} - \frac{e}{c^2}\frac{R}{R^3}\left[\mathbf{R}\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\dot{\mathbf{v}}\right]\right] =$$
$$= \frac{e\mathbf{R}}{R^3}\left(1+3\frac{\mathbf{Rv}}{Rc}\right) - \frac{e}{R^2}\frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{e}{c^2}\frac{\left[\mathbf{R}\left[\mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}\right]\right]}{R^3}\Big|_{t'=t-R/c}.$$

Тогда магнитное поле определяется по формуле

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R}\left[\mathbf{RE}\right] = -\frac{e}{R^3}\frac{\left[\mathbf{Rv}\right]}{c} + \frac{e\left[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R}\right]}{c^2R^2}\Big|_{t'=t-R/c}.$$

Граница между квазистационарной (ближней) и волновой зонами определяется из условия $\frac{e}{R^2_{\text{гр}}} \simeq \frac{e\dot{v}}{c^2R_{\text{гр}}}$.

5.3. (Задача 4.9.) Найти угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ и полное излучение заряда, рассмотренного в предыдущей задаче.

Решение В волновой зоне

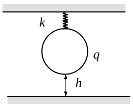
$$\mathbf{S} = c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n} = \frac{e^2}{4\pi c^3R^2}\left[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{n}\right]^2\mathbf{n}.$$

$$\mathrm{d}I = \mathbf{S}\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{n}\right]^2 \mathrm{d}\Omega,$$

где $\mathbf{n}$ — орт в направлении излучения.

$$I = \frac{e^2}{4\pi c^3} 2\pi \int \dot{\mathbf{v}}^2 \sin^3\theta \mathrm{d}\theta = \frac{e^2}{2c^3}\dot{\mathbf{v}}^2 \int \sin^3\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathbf{v}}^{\,2}.$$

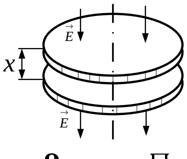
5.4. (Задача 4.16.) На высоте h над проводящим полупространством на пружинке



с жесткостью k подвешено тело с зарядом q. Найти интенсивность излучения как функцию высоты h при малых колебаниях заряженного малого тела массой m.

Решение $I = \frac{8}{3}\frac{q^2 a^2}{c^3}\left(\frac{k}{m} - \frac{q^2}{2mh^3}\right)^2$, где a — амплитуда малых колебаний. *Указание*. Рассмотреть движение заряженного тела под действием притяжения со стороны изображения и возвращающей силы упругости пружины.

5.5. (Задача 4.17.) Расстояние между двумя соприкасающимися концентрическими тонкими металлическими дисками радиуса R, помещенными в однородное электрическое поле $\mathbf{E}$, изменяется по закону $x = a(1 - \cos\omega t)$, $\mathbf{E}$ параллельно оси дисков. Найти среднюю интенсивность дипольного излучения системы. Считать, что $a \ll R$.



Решение При движении металлических дисков на них наводится заряд такой, чтобы поле между дисками было равно 0. Это дает условие для определения заряда на каждом из дисков:

$$4\pi\sigma = E, \;\; \text{откуда} \;\; Q = R^2\pi\sigma = \frac{ER^2}{4}.$$

Дипольный момент системы $d = Qx$, а вторая производная $\ddot{d} = Q\ddot{x}$. Среднее (по периоду) от квадрата второй производной дипольного момента запишется в виде

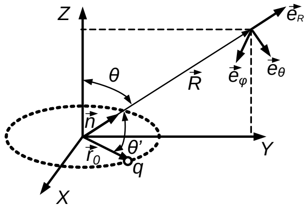
$$\overline{\left|\ddot{d}\right|^2} = Q^2\overline{|\ddot{x}|^2} = Q^2 a^2\omega^4\frac{1}{2}.$$

Тогда средняя интенсивность излучения

$$\overline{I} = \frac{2}{3c^3}\overline{\left|\ddot{d}\right|^2} = E^2R^4a^2\omega^4/48c^3.$$

5.6. (Задача 4.18.) Найти электромагнитное поле, угловое распределение и полную интенсивность, а также исследовать поляризацию при равномерном движении по окружности радиуса a с частотой ω нерелятивистской частицы заряда q $(v \ll c)$.

Решение Пусть частица вращается в плоскости $X-Y$, а направление на точку наблюдения поля выберем в плоскости $Y-Z$. Это не сужает полученное решение, потому что итоговое решение (средняя интенсивность) не может зависеть от выбора угла φ. Что касается поляризации, то ее характер тоже вряд ли зависит от этого угла. Впрочем, это лучше проверить потом. Вторую производную от дипольного момента $\mathbf{d} = q\mathbf{r}_0$ вращающейся частицы можно записать в виде



$$\ddot{\mathbf{d}}_x = -\omega^2 qa\cos\omega t'$$
$$\ddot{\mathbf{d}}_y = -\omega^2 qa\sin\omega t'$$
$$\ddot{\mathbf{d}}_z = 0$$

Тогда интенсивность излучения в телесный угол $\mathrm{d}\Omega$ определяется равенством

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} = \frac{q^2\omega^4 a^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta'(t').$$

Теперь главная проблема - вычислить угол θ'. Для этого рассмотрим скалярное произведение

$$\frac{\mathbf{r}_0\mathbf{n}}{r_0} = \cos\theta' = \frac{r_{0y}n_y}{r_0} = \sin\theta\sin\omega t',$$

откуда

$$\sin^2\theta' = 1-\cos^2\theta' = 1-\sin^2\theta\sin^2\omega t'.$$

Окончательно, для средней интенсивности можно записать

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}} = \frac{q^2\omega^4 a^2}{4\pi c^3}\overline{\left(1-\sin^2\theta\sin^2\omega t'\right)} = \frac{q^2\omega^4 a^2}{8\pi c^3}\left(2-\sin^2\theta\right) = \frac{q^2\omega^4 a^2}{8\pi c^3}\left(1+\cos^2\theta\right).$$

Для вычисления полной средней интенсивности необходимо взять интеграл

$$\int\left(1+\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{16}{3}\pi.$$

Окончательно получаем

$$\overline{I} = \frac{2}{3}\frac{q^2a^2\omega^4}{c^3}.$$

Для определения поляризации необходимо найти значение поля (лучше $\mathbf{E}$, но можно и $\mathbf{H}$). Обычно все утверждения относительно поляризации делаются относительно $\mathbf{E}$, но поскольку в каждый момент времени в вакууме $\mathbf{E} = \mathbf{H}$, и только они повернуты в пространстве друг относительно друга на $\pi/2$, то надо это учесть при окончательном выводе. Итак, магнитное поле в нашем случае выражается формулой

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}],$$

или, в координатной записи

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \ddot{d}_x & \ddot{d}_y & 0 \\ 0 & n_y & n_z \end{vmatrix} = \left\{ \ddot{d}_y n_z \mathbf{i} - \ddot{d}_x n_z \mathbf{j} + \ddot{d}_x n_y \mathbf{k} \right\}.$$

Подставляя вычисленные ранее значения $\ddot{\mathbf{d}}$, получим для компонент магнитного поля

$$\begin{aligned} H_x =& - q\omega^2 a \sin\omega t' \cos\theta, \\ H_y =& q\omega^2 a \cos\omega t' \cos\theta, \\ H_z =& - q\omega^2 a \cos\omega t' \sin\theta. \end{aligned}$$

Для определения поляризации необходимо вычислить магнитное поле в локальной сферической системе координат, т.е. найти компоненты H_R, H_θ, H_φ, что легко сделать в выбранной системе координат (см. рисунок).

$$\begin{aligned} H_R =& H_z \cos\theta + H_y \sin\theta = q\omega^2 a \cos\omega t' \left(-\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta\right) = 0, \\ H_\theta =& H_y \cos\theta - H_z \sin\theta = q\omega^2 a \cos\omega t' \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = q\omega^2 a \cos\omega t', \\ H_\varphi =& - H_x = q\omega^2 a \sin\omega t' \cos\theta. \end{aligned}$$

Как видно из записанного решения, вращение вектора $\mathbf{H}$ происходит в плоскости $\theta - \varphi$. Эти компоненты связаны соотношением

$$\left(\frac{H_\theta}{q\omega^2 a}\right)^2 + \left(\frac{H_\varphi}{q\omega^2 a \cos\theta}\right)^2 = 1.$$

Отсюда видно, что излучение в верхней (нижней) полусфере влево (вправо) эллиптически поляризовано; в экваториальном плоскости поляризация линейная; при $\theta = 0(\pi)$ поляризация круговая левая (правая).

5.7. (Задача 4.19.) За какое время частица, движущаяся по круговой орбите, упадет на заряженный центр из-за потерь на электромагнитное излучение. Получить численную оценку для «атома водорода» в модели Резерфорда. $a = 0,5 \cdot 10^{-8}$см, $e{=}4,8 \cdot 10^{-10}$ $CGSE$, $m{=}0,9 \cdot 10^{-27}$ г.

Решение Излучаемая (теряемая атомом) мощность

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\frac{e^2\mathbf{a}^2}{c^3}.$$

По закону Ньютона $m|\mathbf{a}| = e^2/r^2$, т. е. $|\mathbf{a}| = e^2/mr^2$. Из $\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$ получаем, сократив на r и поделив на 2, что кинетическая энергия на витке радиуса r равна $\frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{2r}$.

Отсюда энергия

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r} = \frac{e^2}{2r} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}.$$

Поэтому $\mathrm{d}\mathcal{E} = e^2\mathrm{d}r/2r^2$.

Переходя в выражении для мощности от $\mathrm{d}\mathcal{E}$ к $\mathrm{d}r$, получаем, подставив выражение $\mathbf{a}$, дифференциальное уравнение

$$r^2\mathrm{d}r = -\frac{4e^4}{3m^2c^3}\mathrm{d}t,$$

где r изменяется от a до 0.

Отсюда время

$$t = \frac{a^3m^2c^3}{4e^4} = 1,3 \cdot 10^{-11} \text{ с.}$$

5.8. (Задача 4.21.) По орбите радиуса a движется пучок нерелятивистских частиц. Заряд пучка — Q, ток — J. Пучок имеет форму кольца с вырезанным углом $\alpha \ll 2\pi$. Найти излучаемую мощность в дипольном приближении. Что покажет прибор, регистрирующий постоянную составляющую напряженности электрического поля, в волновой зоне на оси пучка?

Решение Дополним полный ток недостающим участком α с той же плотностью заряда и двигающийся с той же скоростью, а также таким же участком с противоположным зарядом. Таким образом мы не изменим условие задачи, но полный ток можно не рассматривать - он дает нулевой вклад в дипольное излучение ($\mathbf{d} = 0$). Излучение будет определяться движением маленького участка с зарядом $q = Q\alpha/2\pi$. Скорость движения этого участка определяется формулой

$$v = J/\rho = \frac{2\pi aJ}{Q}.$$

Угловая скорость вращения (частота) $\omega = v/a$. Подставляя все в формулу для полной интенсивности излучения из задачи 4.18, получим

$$\overline{I} = \frac{2}{3}\frac{q^2a^2\omega^4}{c^3} = \frac{8\pi}{3}\frac{\pi\alpha^2a^2J^4}{c^3Q^2};\ E \simeq \frac{Q}{r^2}.$$

5.9. (Задача 4.23.) Определить излучение диполя (с дипольным моментом $\mathbf{p}$), вращающегося в плоскости с постоянной угловой скоростью Ω.

Решение Как только записать проекции дипольного момента на оси X и Y, получим выражения, аналогичные в задаче 4.18. Единственное отличие, величину qa надо заменить на p, а частоту ω заменить на Ω. Тогда

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{p_0^2\Omega^4}{8\pi c^3}\left(1+\cos^2\theta\right),$$

а полная средняя интенсивность

$$\overline{I} = \frac{2}{3}\frac{p_0^2\Omega^4}{c^3}.$$

5.10. (Задача 4.26.) Найти излученную энергию при свободном «схлопывании» под действием собственного поля пластин плоского конденсатора. Каждая пластина имеет массу M, площадь S, величину заряда Q. Начальный зазор между пластинами d_0, конечный — d.

Решение Уравнение движения 1 пластины в системе центра масс (т.е. посредине между ними) имеет вид

$$M\ddot{x} = F = Q\frac{U}{d}.$$

Емкость конденсатора $C = \frac{S}{4\pi d}$. Разность потенциалов $U = Q/C$. Тогда

$$M\dot{v} = \frac{Q^2}{Cd} = \frac{Q^2 4\pi}{S}.$$

Ускорение $\dot{v} = Q^2/4\pi SM = \mathrm{const}$ постоянно, и, следовательно, пластины движутся равноускоренно. Пройденный путь обеими пластинами $d_0 - d = \dot{v}t^2/2$, откуда

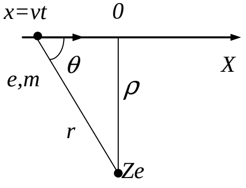
$$t = \sqrt{\frac{2(d_0-d)}{\dot{v}}} = \sqrt{\frac{2(d_0-d)SM}{4\pi Q^2}}.$$

Полные потери энергии $\Delta\mathcal{E} = It$. Подставляя в это выражение значение для полной интенсивности, получим

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2}{3c^3}(\ddot{p})^2t = \frac{2}{3c^3}\left(\frac{Q^3 4\pi}{SM}\right)^2\sqrt{\frac{2(d_0-d)SM}{4\pi Q^2}} = \frac{8}{3}\frac{Q^2}{c^3}\sqrt{d_0-d}\left(\frac{2\pi Q^2}{MS}\right)^{3/2}.$$

5.11. Оценить энергию излучения электрона, пролетающего на большом расстоянии от тяжелого ядра с зарядом Ze $(v \ll c)$.

Решение



$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\frac{e^2a^2}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{e^2Z^2e^4}{m^2c^3r^4}.$$

Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{2}{3}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(\rho^2+v^2t^2)^2} = \frac{2}{3}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3}J,$$

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(\rho^2+v^2t^2)^2} = \frac{\rho}{\rho^4v}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(vt/\rho)}{(1+(vt/\rho)^2)^2} = \frac{1}{\rho^3v}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^4\theta\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta},$$

$$vt/\rho = \operatorname{ctg}\theta.$$

Тогда

$$1/(1+\operatorname{ctg}^2\theta)^2 = \sin^4\theta;\ \ \mathrm{d}(\operatorname{ctg}\theta) = -\mathrm{d}\theta/\sin^2\theta.$$

$$J = \frac{1}{\rho^3v}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2\rho^3v}.$$

Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{2}{3}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3}\cdot\frac{\pi}{2\rho^3v} = \frac{\pi}{3}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3\rho^3v}\ \text{ при }\ \frac{Ze^2}{\rho mv^2} << 1.$$

Можно получить подобный результат и с помощью оценок Движение частицы без отклонения от прямолинейной траектории описывается уравнением

$$\frac{m\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F \approx \frac{Ze^2}{\rho^2},\ \ \dot{v} \approx \frac{Ze^2}{m\rho^2}.$$

Тогда

$$I \approx \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\dot{v})^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{Z^2e^4}{m^2\rho^4} = \frac{\Delta E}{\Delta t}.$$

Используя оценку $\Delta t \sim \frac{\rho}{v}$, получим

$$\Delta E \sim \frac{Z^2e^6}{m^2c^3\rho^3v}.$$