



Решение задачи о дифракции на линзе

Рассмотрим задачу о получении изображения точки А, которая находится слева от плоскости линзы на расстоянии a . Найдем поле в плоскости линзы (перед линзой).

$$E(x_L, y_L, 0) = \frac{k}{2\pi iz} \iint_S E(S) \exp \left\{ i \left(kz - \omega t + k \frac{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}{2z} \right) \right\} dx dy,$$

здесь z - расстояние от плоскости интегрирования (предмета) до линзы. В нашем случае $z = a$, а поле $E(S)$ в плоскости предмета $E(S) = E_0 S_0 \delta(x - x_A) \delta(y)$. Тогда после интегрирование по плоскости изображения получим

$$E(x_L, y_L, 0) = \frac{k S_0}{2\pi i a} E_0 \exp \left\{ i \left(a + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a} \right) \right\}.$$

Поле в плоскости $z = b$ определяется фазовым множителем линзы и интегралом Кирхгофа по апертуре линзы.

$$E_b = \frac{k}{2\pi i b} e^{ikb} \iint_D E(x_L, y_L, 0) \exp \left\{ ik \frac{(x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2}{2b} - ik \frac{x_L^2 + y_L^2}{2F} dx_L dy_L \right\}$$

Подставив выражение для $E(x_L, y_L, 0)$, получим

$$E_b = -\frac{k^2 S_0}{4\pi^2 ab} E_0 \iint_D e^{i\varphi(x_L, y_L)} dx_L dy_L,$$

где

$$\varphi(x_L, y_L) = k \left\{ (a + b) + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a} + \frac{(x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2}{2b} - \frac{x_L^2 + y_L^2}{2F} \right\}.$$

$$\varphi(x_L, y_L) = k(a + b) - k \cdot x_L \left\{ \frac{x_A}{a} + \frac{x_B}{b} \right\} - k \cdot y_L \frac{y_B}{b} + \frac{k}{2} \left\{ \frac{x_B^2 + y_B^2}{b} + \frac{x_A^2}{a} \right\}$$

Квадратичные по x_L и y_L члены выражения взаимно сократились в связи с тождеством $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$.

После вычисления интеграла по апертуре линзы (считая линзу квадратной, $\pm D/2$ по обеим координатам), и вычисления квадрата модуля амплитуды, получим для интенсивности в плоскости $z = b$

$$I_B = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{k^2 S_0}{4\pi^2 ab} D^2 E_0 \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin U_x}{U_x} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin U_y}{U_y} \right)^2,$$

где

$$U_x = \frac{kD}{2} \left(\frac{x_A}{a} + \frac{x_B}{b} \right); \quad U_y = \frac{kD}{2} \cdot \frac{y_B}{b}.$$

Из приведенного результата видно, что максимум интенсивности изображения приходится на точку, в которой $U_x = U_y = 0$; $x_{B0} = -x_A/a * b$; $y_{B0} = y_A = 0$, что соответствует законам геометрической оптики. А «размытие» пятна точечного источника определяется соотношением $U_x \sim U_y \sim \pi$, что соответствует $\Delta x_B \sim \Delta y_B \sim \frac{\lambda}{D} b$.