

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ОПТИКА

УДК 535.80

### ОПТИКА НАКЛОННЫХ И КОСЫХ ЛУЧЕЙ КОНИКОИДА

© 2006 г. А. П. Смирнов

*Государственный университет информационных технологий механики и оптики,  
197101 Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 29.08.2005 г.

На основе точного выражения углового эйконала осесимметричного коникоида – поверхности, образованной вращением кривой второго порядка, коники, – получены выражения для гауссовой оптики наклонных лучей, отличающиеся от известных инвариантов Гульстранда–Юнга для сферы набором независимых аргументов и содержащие в явном виде параметры оптической системы. Исследованы коллинеарные свойства оптической поверхности с наклонными пучками. Проведено расширение теории астигматизма на случай косых лучей, позволяющее строить и анализировать в первом приближении фокальные поверхности реального широкого пучка лучей. Теория опробована на примере оптимизации апланатической линзы для случая внеосевой точки предмета. На основе точного выражения углового эйконала даны определения интегральных аберраций. Предложенный метод предполагается использовать для оптимизации оптических систем.

PACS: 42.15

Расчетная оптика строится на базе гауссовой оптики. Под гауссовой оптикой понимают законы преобразования лучей, имеющих бесконечно малый угол с оптической осью, или парааксиальных лучей. Эти же законы справедливы для абсолютного прибора, описываемого в рамках коллинеарной оптики с помощью дробно-линейных преобразований. В случае осесимметричной оптической системы и при специальном выборе начал координат в пространствах предмета и изображения (в точках главных фокусов) преобразования сводятся к двухпараметрическим соотношениям декартовых координат предмета и изображения известного вида

$$X' = fX/Z, \quad Y' = fY/Z, \quad Z' = ff'/Z \quad (1)$$

Параметрами служат переднее ( $f$ ) и заднее ( $f'$ ) фокусные расстояния. Последнее уравнение в (1) называют соотношением Ньютона.

Связь коллинеарной оптики, построенной на основе дробно-линейных преобразований, с реальной оптической поверхностью осуществляется с помощью углового эйконала (угловой характеристики) поверхности [1], в выражении для которого учитываются только члены первого порядка малости относительно лучевых компонент. Результатом перехода от абстрактной модели абсолютного прибора к оптической поверхности является инвариант Аббе

$$n(1/r - 1/z) = n'(1/r' - 1/z') \quad (2)$$

связывающий аппликаты плоскостей предмета ( $z$ ) и изображения ( $z'$ ) в пространствах с показателями преломления  $n$  и  $n'$  соответственно, разделенных оптической поверхностью с радиусом кривизны  $r$  в вершине. Начало координат – в вершине поверхности, главные плоскости совпадают и проходят через начало координат. С помощью соотношений (1) и (2) строится парааксиальная оптика, или оптика Гаусса, и задается точка отсчета для вычисления аберраций.

Таким образом, построение парааксиальной оптики включает две ступени. На первой ступени строится чисто математическая модель дробно-линейного преобразования трехмерных декартовых пространств с осевой симметрией, вводятся понятия главных фокусов (1), главных плоскостей, кардинальные точки, соотношение Ньютона. На втором шаге определяются условия, при которых реальная оптическая система приближается дробно-линейной, коллинеарной, моделью. Этим условием, как было отмечено, служит инвариант Аббе. Последовательность шагов значения не имеет.

Русинов отмечает [2], что “использование дробно-линейных преобразований в общем случае создания оптической системы с большим полем зрения или с большой светосилой не представляется возможным”. В качестве “компромиссного решения” рассматривается область пространств предмета и изображения вблизи главного луча. Опираясь на геометрические построения и дифференциальную геометрию, Русинов выводит классические положения оптики

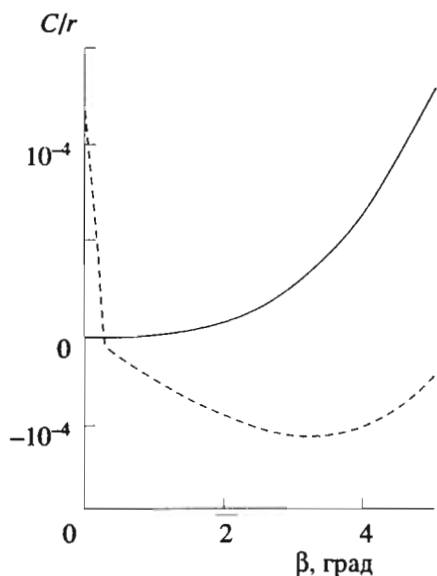


Рис. 4. Зависимость комы от полевого угла в плоскости, проходящей через апланатическую точку (сплошная кривая) и в плоскости оптимизации по астигматической разности (штриховая кривая).

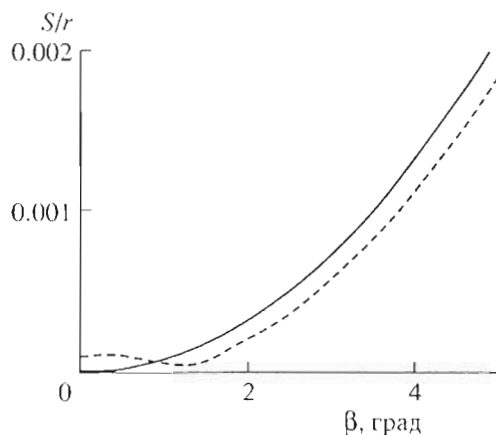


Рис. 5. Сферическая aberrация апланатической линзы для внеосевой точки предмета в плоскости, проходящей через апланатическую точку (сплошная кривая) и плоскость оптимизации (штриховая кривая).

где  $T'_0$  согласно (3) есть реальное положение главного луча в плоскости изображения. На рис. 4 приведены графики комы апланатической линзы для внеосевой точки предмета для этих же плоскостей, рассчитанные по (25). Как видим из этих графиков, кома, не меняясь по абсолютной величине, перераспределяется в пределах углового поля и меняет знак.

Сферическая aberrация как мера стигматичности может быть определена как среднеквадра-

тичное отклонение положений точек пересечения лучами пучка плоскости изображения

$$S = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (T'_i - \langle T' \rangle_H)^2}, \quad (26)$$

где  $M$  – число лучей в пучке. На рис. 5 представлены графики сферической aberrации для двух рассмотренных случаев положения плоскости предмета, рассчитанные по формуле (26).

Из приведенных расчетов интегральных aberrаций – дисторсии, комы и сферической aberrации – следует, что устранение астигматизма (уменьшение астигматической разности более чем на два порядка) несущественно отразилось на этих aberrациях. Для комплексной оптимизации aberrаций необходимо использовать обобщенную целевую функцию, принципы построения которой достаточно полно разработаны в теории планирования эксперимента [8]. Необходимые для этого выражения частных откликов получены выше.

Кривые меридионального и сагиттального фокусов есть сечение фокальных поверхностей меридиональной плоскостью. Вид самой поверхности формируется всем широким пучком в общем случае внеосевой точки предмета. В этом случае подавляющее число лучей пучка – это косые лучи, для которых меридиональная и сагиттальная плоскости не определены, однако, согласно фокальной теории лучей первого порядка [1], на каждом луче прямолинейной конгруэнции имеются два фокуса. В пространстве изображения эти фокусы образуют фокальные, или каустические, поверхности. Пространственное положение этих фокусов может быть найдено в рамках излагаемого в данной работе подхода, основанного на точном выражении углового эйконала.

### Косые пучки

Для косых пучков, т.е. пучков, главный луч которых некомпланарен оси поверхности, система (4) не разбивается на две подсистемы. Для того чтобы удовлетворить требованию стигматичности пучков, необходимо потребовать независимости свободного столбца системы (4) от вектора-столбца угловых компонент. Это условие удовлетворяется, если определитель системы равен нулю. Если полагать, что передний отрезок задан, то равенство нулю определителя системы (4) дает уравнение относительно заднего отрезка. Используя известные свойства определителя, приравниваем нулю нижний левый квадрат коэффициентов  $2 \times 2$ . В результате получаем в неявном

Гаусса сферической поверхности для наклонных пучков: инвариант Гульстранда-Юнга, положения кардинальных точек.

В работе [3] получены точные выражения для углового эйконала коникоида. В этом случае построение оптики Гаусса наклонных пучков возможно по сценарию парааксиальной оптики. В работе [4] предложен иной подход к анализу систем с двухсторонней, или плоскостной, симметрией на основе обобщения аберрационных коэффициентов Зайделя.

Здесь следует заметить, что единственным отличием коллинеации, описывающей абсолютный оптический прибор, преобразующий наклонные пучки, является понижение степени симметрии. В случае меридиональных пучков в осесимметричной системе, так же как и в случае пространственных меридиональных трансформаций самой системы, таких как наклон или параллельный сдвиг, степень симметрии понижается до двух: говорят, что такие системы обладают двухсторонней или плоскостной симметрией.

Свойства дробно-линейных преобразований с плоскостной симметрией, а также возможности ее реализации с помощью оптических поверхностей в общем виде рассмотрены в работе [5]. В данной работе предложена модель оптики Гаусса наклонных пучков осесимметричной оптической поверхности типа коникоида.

## НАКЛОННЫЕ ПУЧКИ

Рассмотрим бесконечно узкий пучок лучей  $\{(\xi, \eta, \zeta)\} \in O(0, q, m)$ , лежащий в бесконечно малой окрестности главного луча, который наклонно падает и преломляется на оптической поверхности в меридиональной плоскости. Компоненты преломленного пучка соответственно находятся в бесконечно малой окрестности преломленного главного луча:  $\{(\xi', \eta', \zeta')\} \in O(0, q', m')$ .

Угловую характеристику сферической поверхности отнесем к координатным системам в пространствах предмета и изображения с началами в точках  $A(0, 0, s)$  и  $A'(0, 0, s')$ . Воспользуемся известным свойством углового эйконала [1]:

$$\begin{aligned} x &= \partial T / \partial \xi, & x' &= -\partial T / \partial \xi', & y &= \partial T / \partial \eta, \\ y' &= -\partial T / \partial \eta', \end{aligned} \quad (3)$$

где  $(x, y)$  и  $(x', y')$  – реальные координаты предметной точки и ее изображения. Представим (3) линейными членами рядов Тейлора в точке  $(0, q, 0,$

$q'), p = p' = 0$  и перепишем их в виде системы уравнений

$$\begin{pmatrix} T_{2000} & T_{1100} & T_{1010} & T_{1001} \\ T_{1100} & T_{0200} & T_{0110} & T_{0101} \\ T_{1010} & T_{0110} & T_{0020} & T_{0011} \\ T_{1001} & T_{0101} & T_{0011} & T_{0002} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi - p \\ \eta - q \\ \xi' - p' \\ \eta' - q' \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &x - T_{1000} \\ &= y - T_{0100} \\ &-x' - T_{0010} \\ &-y' - T_{0001} \end{aligned}$$

где нижние индексы указывают на номер аргумента и порядок дифференцирования.

Точное выражение для углового эйконала осесимметричного коникоида имеет вид [3]

$$\begin{aligned} T(\xi, \eta, \xi', \eta') &= \\ &= \frac{r}{1+k} \left[ \text{sign}(\Delta n) \sqrt{(1+k)(\Delta \xi'^2 + \Delta \eta'^2) + \Delta \zeta'^2 - \Delta \zeta} \right] + \\ &+ s' \zeta' - s \zeta. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражения для производных по вертикальным угловым компонентам имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} T_{0100} &= \frac{r}{1+k} \left( \text{sign}(\Delta n) \frac{\sigma}{m\gamma} - \frac{q}{m} \right) + s \frac{q}{m}, \\ T_{0001} &= \frac{r}{1+k} \left( \text{sign}(\Delta n) \frac{\sigma'}{m'\gamma'} + \frac{q'}{m'} \right) - s' \frac{q'}{m'}, \\ T_{0200} &= \frac{r}{1+k} \left( \frac{\text{sign}(\Delta n)}{m^2 \gamma} \left( \mu + \frac{q\sigma}{m} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\sigma^2}{\gamma^2} + k(m^2 + q\Delta q) \right) \frac{n^2}{m^3} \right) - \frac{n^2}{m^2}, \\ T_{0002} &= \frac{r}{1+k} \left( \frac{\text{sign}(\Delta n)}{m^2 \gamma} \left( \mu + \frac{q'\sigma'}{m'} - \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{\sigma'^2}{\gamma'^2} + k(m'^2 - q'\Delta q) \right) + \frac{n'^2}{m'^3} \right) - s' \frac{n'^2}{m'^3}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$T_{0101} = \frac{r \text{sign}(\Delta n)}{(1+k)mm'\gamma} \left( \frac{\sigma\sigma'}{\gamma^2} + \mu + kmm' \right).$$

Смешанные производные по вертикальным и горизонтальным угловым компонентам выражаются следующим образом:

$$T_{1100} = \frac{r}{1+k} \left[ \frac{\text{sign}(\Delta n)}{m^2 \gamma} \left( pq \frac{m'}{m} - \frac{\sigma \bar{\sigma}}{\gamma^2} \right) - \frac{pq}{m^3} \right] + s \frac{pq}{m^3},$$

$$T_{0011} = \frac{r}{1+k} \left[ \frac{\text{sign}(\Delta n)}{m'^2 \gamma} \left( p'q' \frac{m}{m'} - \frac{\sigma' \bar{\sigma}'}{\gamma^2} \right) - \frac{p'q'}{m'^3} \right] - s' \frac{p'q'}{m'^3},$$

$$T_{1001} = \frac{r \text{sign}(\Delta n)}{(1+k)mm'\gamma} \left( pq' - \frac{\bar{\sigma} \sigma'}{\gamma^2} \right),$$

$$T_{0110} = \frac{r \text{sign}(\Delta n)}{(1+k)mm'\gamma} \left( p'q - \frac{\sigma \bar{\sigma}'}{\gamma^2} \right).$$

В (6) и (7) использованы следующие обозначения.

$$\begin{aligned} \sigma &= q\Delta m - (1+k)m\Delta q, \\ \sigma' &= -q'\Delta m + (1+k)m'\Delta q, \\ \gamma &= \sqrt{(1+k)\Delta q^2 + \Delta m^2}, \\ \mu &= qq' + mm'. \end{aligned} \quad (8)$$

Недостающие производные по горизонтальным угловым компонентам получаются из соответствующих производных по вертикальным компонентам в результате замены  $q$  на  $p$  и  $q'$  на  $p'$  во всех выражениях, содержащих эти переменные. Такие замены произошли при переходе от  $\sigma$  к  $\bar{\sigma}$  и от  $\sigma'$  к  $\bar{\sigma}'$  в (7).

В точке  $(0, q, 0, q')$  первые горизонтальные производные и все смешанные вторые производные отвечают равенству  $T_{1000} = T_{0010} = T_{1100} = T_{1001} = T_{0110} = T_{0011} = 0$ . В этом случае система четвертого порядка (4) распадается на две независимых подсистемы второго порядка относительно вертикальных и горизонтальных компонент. Их решения относительно угловых компонент в пространстве предмета  $(\xi, \eta)$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{T_{0020}}{T_{1010}} x - \frac{T_{2000}T_{0020} - T_{1010}^2}{T_{1010}} \xi, \\ y' = T_{0001} + \frac{T_{0002}}{T_{0101}}(y - T_{0100}) - \frac{T_{0200}T_{0002} - T_{0101}^2}{T_{0101}}(\eta - q) \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) следует – для того чтобы в первом приближении величины  $(x', y')$  были координатами стигматического изображения, они не должны зависеть от угловых компонент. Поэтому необходи-

мым условием построения абсолютного прибора на основе коникоида будут следующие равенства:

$$\begin{aligned} T_{2000}T_{0020} - T_{1010}^2 &= 0, \\ T_{0200}T_{0002} - T_{0101}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение (10) описывает преобразования в сагиттальной плоскости, второе – в меридиональной плоскости.

Как видно из (6), (7), вторые несмешанные производные зависят (а смешанные не зависят) от положения плоскостей предмета и изображения. Поэтому уравнения системы (10) могут быть выполнены в двух случаях. В первом – один из фокусов поверхности находится на бесконечности. Аппликата переднего фокуса  $F_z = s$  отвечает условиям  $T_{2000} = 0$ ,  $T_{0020} \rightarrow \infty$  для сагиттальной плоскости и соответственно условиям  $T_{0200} = 0$ ,  $T_{0002} \rightarrow \infty$  – для меридиональной плоскости, т.е.

$$Fm_z = \frac{r}{\gamma n^2} - \frac{\text{sign}(\Delta n)m}{\gamma n^2} \times \left[ \mu + \frac{q\sigma}{m} - \frac{\sigma^2}{\gamma^2} + k(m^2 + q\Delta q) \right] \quad (11)$$

$$Fs_z = \frac{r}{1+k} \left[ \frac{\text{sign}(\Delta n)}{\gamma} (m' + km) \right]$$

Задние фокусы  $F'_z = s'$  определим из условий соответственно  $T_{0200} = 0$ ,  $T_{0002} = 0$ :

$$\begin{aligned} Fm'_z &= \frac{r}{\gamma n'^2} + \frac{\text{sign}(\Delta n)m'}{\gamma n'^2} \times \\ &\times \left[ \mu + \frac{q'\sigma'}{m'} - \frac{\sigma'^2}{\gamma^2} + k(m'^2 - q'\Delta q) \right], \\ Fs'_z &= \frac{r}{1+k} \left[ + \frac{\text{sign}(\Delta n)}{\gamma} (m + km') \right] \end{aligned}$$

В параксиальном приближении из (8) следует, что

$$\begin{aligned} q, q' &\rightarrow 0, \quad m \rightarrow n, \quad m' \rightarrow n', \quad \sigma, \sigma' \rightarrow 0, \\ \gamma &\rightarrow \Delta n, \quad m \rightarrow nn', \quad Fm_z \rightarrow F, \quad Fm'_z \rightarrow F'. \end{aligned}$$

При этом из (11) и (12), как и следовало ожидать, получаем известные соотношения

$$F = -rn/\Delta n, \quad F' = rn'/\Delta n$$

Во втором случае оптически сопрягаются точки предмета и изображения, находящиеся на конечном расстоянии. В этом случае условия (10) запи-

шутся в виде аналогов соотношения Аббе для наклонных пучков в меридиональной:

$$Fm_t - s)(Fm'_t - s' = mm' \left[ \frac{r}{(1+k)\gamma mn'} \right]^2 \left[ \mu + km'm' + \frac{\sigma\sigma'}{\gamma^2} \right]^2 \quad (14)$$

и сагиттальной:

$$(Fs_t - s)(Fs'_t - s' = mm'r^2/\gamma^2 \quad (15)$$

плоскостях.

Соотношения (14) и (15), так же как известные инварианты Гульстранда-Юнга [6] в случае сферической поверхности, позволяют рассчитать фокальные поверхности наклонных пучков. Отметим, что инварианты Гульстранда-Юнга выражены в локальных косоугольных координатах, что неудобно при вычислениях. Полученные здесь соотношения представлены в глобальной декартовой системе координат и справедливы для любой поверхности типа коникоида. В данной работе не приведены соотношения для параболоида,  $k = -1$ . Однако они могут быть получены аналогично исходя из точного выражения для углового зйконала параболоида [3].

**КОЛЛИНЕАРНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ С НАКЛОННЫМИ ПУЧКАМИ**

При построении систем коллинеарной оптики [1] начала координат в пространствах предмета и изображения помещают в точки фокусов. Аппликаты в новых системах на основании выражений (11), (12) выразим через производные коэффициенты

$$\begin{aligned} Zm &= s - Fm_t = (m^3/n^2)T_{0020}, \\ Zm' &= s' - Fm'_t = (-m'^3/n'^2)T_{0002}, \\ Zs &= s - Fs_t = mT_{0020}, \\ Zs' &= s' - Fs'_t = -m'T_{0002}. \end{aligned} \quad (16)$$

Преобразования координат (9) с учетом (10) в (16) запишем в виде дробно-линейных преобразований

$$x' = \frac{fs}{Zs}x, \quad y' = \frac{fm(y - T_{0010})}{Zm} + T_{0001}. \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} fs &= -\text{sign}(\Delta n) \frac{m'r}{\gamma}, \\ fm &= -\text{sign}(\Delta n) \frac{m'^2 r}{(1+k)n^2 m' \gamma} \left( \frac{\sigma\sigma'}{\gamma^2} + \mu + km'm' \right) \end{aligned}$$

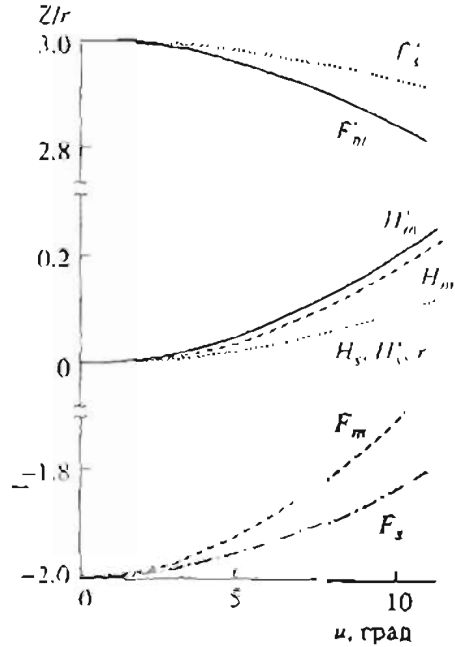


Рис. 1. Фокальные и главные поверхности сферической поверхности.

С учетом (16) и введенных обозначений в (17) перепишем (10) в виде аналогов известного соотношения Ньютона для наклонных пучков

$$ZsZs' = fsfs', \quad (18)$$

где

$$fs' = \text{sign}(\Delta n) \frac{m'r}{\gamma}, \quad ZmZm' = fmf'm'$$

где

$$fm' = \text{sign}(\Delta n) \frac{m'^2 r}{(1+k)n^2 m' \gamma} \left( \frac{\sigma\sigma'}{\gamma^2} + \mu + km'm' \right)$$

Отметим, что величины  $fm, fm', fs, fs'$ , введенные в (17) и (18) есть проекции фокусных отрезков на ось аппликат, с помощью которых определяются аппликаты главных кардинальных точек (сами кардинальные точки расположены на главном луче):

$$\begin{aligned} Hs &= Fs - fs, \quad Hs' = Fs' - fs', \\ Hm &= Fm - fm, \quad Hm' = Fm' - fm' \end{aligned} \quad (19)$$

В качестве иллюстрации полученных соотношений на рис. 1 представлены графики фокальных и главных поверхностей сферической поверхности, разделяющей среды с показателями преломления  $n = 1, n' = 1.5$ . На графиках в качестве аргумента использован передний апертурный угол главного луча.

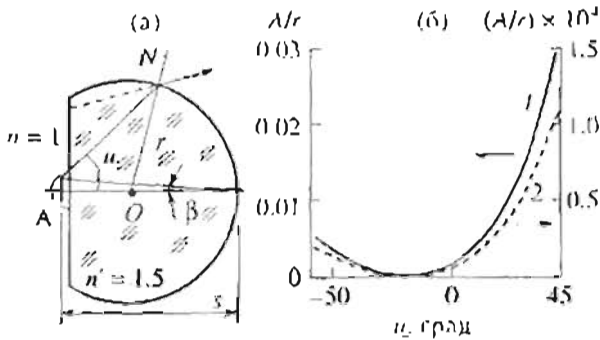


Рис. 2. а – апланатическая линза: А – протяженный предмет в иммерсии. б – графики изменения астигматической разности для крайней точки предмета в зависимости от переднего апертурного угла  $u$  и линзы со сферической поверхностью ( $k = 0$ ) и различными передними отрезками  $s = (n + n')r/n' = 5/3r$  (1),  $s_{opt} = 1.6509r$  (2);  $\beta = 5^\circ$ .

Как видно из графиков, сагиттальные фокальные поверхности имеют меньшую кривизну по сравнению с меридиональными. Сагиттальная главная поверхность имеет радиус кривизны самой оптической поверхности, меридиональные главные поверхности, касаясь оптической поверхности в полюсе, проникают вглубь более плотной оптической среды.

### АБЕРРАЦИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО КОНИКОИДА

Информация о положении стигматических (в первом угловом приближении) изображений в узких пучках позволяет оценить такие aberrации оптической поверхности, как астигматизм, кривизна поля и наклон изображения. Поперечные aberrации, абсолютные, не разделенные на порядки точности, могут быть определены из основного свойства углового эйконала (3) с использованием его точного выражения [3].

#### Астигматизм

Заметим, что астигматическая разность Зайделя как aberrация третьего порядка определяется на заданной высоте над оптической осью в пространстве изображения. Астигматизм определяется как разность тангенциальной, меридиональной и сагиттальной кривизны поля.

Используя соотношения (14) в (15), мы определяем величины меридиональных и сагиттальных задних отрезков и как их разность определяем проекцию на ось  $OZ$  астигматической разности по главному лучу. Несмотря на указанное различие, обе характеристики – астигматическая разность Зайделя и проекция наклонной астигматической

разности, – очевидно, эквивалентны как критерия оптимизации с позиций теории Зайделя.

По аналогии определим и наклонный астигматизм, и наклонную кривизну поля. Далее слово “наклонный” будем опускать. Итак, астигматическую разность как функцию параметров системы запишем в виде

$$A(n, n', k, r, s) = (Fm'_z - Fs'_z) + \frac{mm'r}{\gamma^2} \left\{ \frac{1}{Fs_z - s} - \frac{[\mu + kmm' + (\sigma\sigma'/\gamma)^2]^2}{(1+k)^2(nn')^2(Fm_z - s)} \right\} \quad (20)$$

Функция (20) определена на всем множестве угловых компонент  $\{q, q', m, m'\}$ . Она имеет 4 степени свободы, однако при расчетах, конкретизируя положение точки предмета в заданном поле предмета и положение точки поверхности в пределах заданной диафрагмы, мы устраняем эту свободу и “вычерчиваем” в области определения углового эйконала гиперповерхность  $H$ , описываемую параметрами заданной оптической системы. Таким образом, астигматическая разность  $A(n, n', k, r, s)$  определена на некотором подмножестве угловых компонент, заданном этой гиперплоскостью. С изменением параметров системы трансформируется гиперплоскость и изменяется функция астигматической разности.

Оптимизацию системы удобно осуществить, направив изменения максимума целевой функции на гиперплоскости, в данном случае астигматической разности, против градиента целевой функции по параметрам. В качестве примера рассмотрим оптимизацию поверхности фронтальной плосковыпуклой линзы иммерсионного объектива Амичи (см., например, [7]) для протяженного объекта, расположенного перпендикулярно к оптической оси (рис. 2а). Если поверхность линзы сферическая, то для осевых точек предмета и изображения выполнены условия апланатизма. В этом случае для минимизации aberrации по высоте предмета минимизируют ошлябку закона свинусов, который, очевидно, может быть записан в обозначениях данной работы как

$$V = q'/q = \text{const}, \quad (0, q, 0, q') \in H_m \quad (21)$$

Если относительные габаритные размеры фиксированы, то свободными параметрами, или факторами оптимизации, остаются передний отрезок  $s$  и коэффициент  $k$ .

Недостатками алгоритма, основанного на законе синусов (21), являются наличие неопределенности в области нуля знаменателя и отсутствие явной зависимости от факторов оптимизации. Этих недостатков лишен алгоритм, базирующийся на минимизации астигматической разности (20).

Воспользуемся методами теории планирования эксперимента, в частности методом градиентного спуска, или крутого восхождения (см., например, [8]). Построим вектор  $\tau$  – градиент астигматической разности по переднему отрезку  $s$  и коэффициенту  $k$ , и, выбрав интервалы варьирования, исходя из условий задачи и возможностей вычислений  $\delta s$  и  $\delta k$  находим значения целевой функции на матрице планирования  $P$ :

$$\tau = \left( \frac{\partial A}{\partial s}, \frac{\partial A}{\partial k} \right), \quad P = \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \\ - & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$A_i^* = \frac{1}{|\tau|} \left( \frac{\partial A}{\partial s} P_{i1} \delta s + \frac{\partial A}{\partial k} \delta k \right), \quad i =$$

Выбрав из множества  $A^*$  минимальное значение, определяем точку старта для следующего шага и продолжаем процесс, пока не попадем в стационарную область, где целевая функция или достигает оптимума, или не изменяется в пределах погрешности вычислений.

На рис. 2б представлен результат оптимизации функции (20) апланатической системы описанным методом. Конструктивные параметры системы приведены на рис. 2а. Варьирование осуществлялось по двум параметрам. Оказалось, что  $k_{\text{опт}} = k_0 = 0$ . Передний отрезок для минимизации aberrации должен быть уменьшен с  $5/3r$  до  $1.6509r$ , соответственно уменьшится и задний отрезок. При этом aberrации уменьшаются на два порядка.

Располагая кривыми меридионального и сагиттального фокусов, определяем по ним кривизну поля и астигматизм. В рассмотренном примере эти величины имеют следующие значения: до оптимизации  $A_0 = 8.43 \times 10^{-3}/r$ ,  $Km_0 = 0.011/r$ ,  $Ks_0 = 3 \times 10^{-3}/r$ , после оптимизации  $A^* = 3.14 \times 10^{-5}/r$ ,  $Km^* = 4.30 \times 10^{-5}/r$ ,  $Ks^* = 1.16 \times 10^{-5}/r$ .

$$N_v = \frac{\partial s'_v}{\partial y'} = \frac{\partial s'_v}{\partial q'} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial q'^2} \right)^{-1} = \frac{\partial s'_v}{T_{\text{оооо}} \partial q'}, \quad (23)$$

$$v = m, s$$

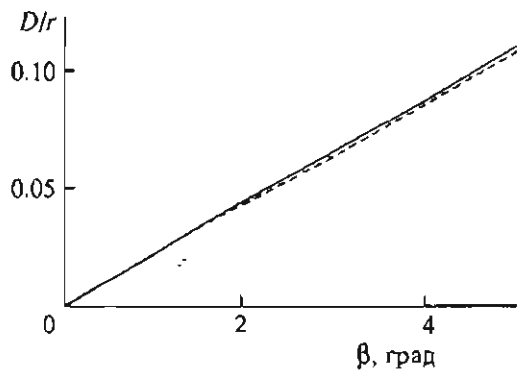


Рис. 3. Дисторсия в широком пучке в зависимости от полевого угла. Сплошная кривая – для плоскости предмета, проходящей через апланатическую точку. Штриховая кривая – для плоскости, оптимизируемой по астигматической разности.

### Поперечные aberrации

Опираясь на соотношения (3), определим абсолютные поперечные aberrации. Под словом “абсолютные” будем понимать суммарные aberrации всех порядков по угловым компонентам.

Дисторсия определяется как для пучка лучей, так и для одного луча в зависимости от структуры множества  $H$  как разность истинного положения центра тяжести пучка (луча) и его парааксиального положения в плоскости изображения:

$$T' = \sqrt{\left( \frac{rn'}{rn + s\Delta n} h(x, y) \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial p'} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial q'} \right)^2},$$

где  $h(x, y)$  – расстояние точки предмета до оптической оси, угловые скобки обозначают усреднение на множестве пар угловых компонент  $H$ . В данном случае множество  $H$  определяется всем действующим отверстием оптической поверхности. Производная  $\partial T / \partial p'$  записывается аналогично производной  $\partial T / \partial q'$  с заменой  $q'$  на  $p'$ .

На рис. 3 представлены графики зависимости дисторсии, рассчитанной по формуле (24) для широкого лучка (световой диаметр  $D_c = r$ ), от углового удаления точки предмета от оптической оси – полевого угла  $\beta$ .

Как видим, дисторсия по полю меняется линейно как для плоскости предмета, проходящей через апланатическую точку, так и для плоскости оптимизации. Различие между aberrациями незначительно.

Интегральную кому как меру асимметрии пучка относительно главного луча ( $p_0, q_0, p'_0, q'_0$ ) определим по формуле

$$C = \langle T' \rangle_H - T'_\lambda$$

виде квадратное уравнение, содержащее искомое неизвестное – задний отрезок, от которого зависят производные  $T_{0020}(s')$ ,  $T_{0002}(s')$  и  $T_{0011}(s')$ :

$$\left. \begin{aligned} a_{11} - \alpha s' a_{12} - \beta s' \\ a_{21} - \beta s' a_{22} - \alpha s' \end{aligned} \right\} = 0$$

$$a_{11} = (T_{2000}T_{0020}(0) - T_{1010}^2)c - (T_{2000}T_{0110} - T_{1100}T_{1010})^2, \quad (27)$$

$$a_{21} = a_{12} = (T_{2000}T_{0011}(0) - T_{1010}T_{1001})c - (T_{2000}T_{0110} - T_{1100}T_{1010})(T_{2000}T_{0101} - T_{1100}T_{1001}),$$

$$a_{22} = (T_{2000}T_{0002}(0) - T_{1001}^2)c - (T_{2000}T_{0101} - T_{1100}T_{1001})^2,$$

где

$$A = T_{2000}, \quad c = (T_{2000}T_{0200} - T_{1100}^2)$$

$$\alpha = Acn'^2/m^3, \quad \beta = Asp'q'/m'$$

Запишем (27) в виде уравнения

$$(\alpha^2 - \beta^2)s'^2 + [2\beta a_{12} - \alpha(a_{11} + a_{22})]s' + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0. \quad (28)$$

Два решения уравнения (28) на множестве пар угловых компонент на гиперплоскости системы образуют две фокальные поверхности в вертикальном и горизонтальном приближении угловых компонент. Весь косой пучок фокусируется на отрезке между этими поверхностями. Длина каждого отрезка равна астигматической разности данного косого бесконечно узкого пучка. Для примера, рассмотренного выше, астигматическая разность широкого пучка представлена на графике рис. 6.

Астигматическая разность рассчитывалась для косых лучей, проходящих через пять concentрических окружностей на входной поверхности и расположенных равномерно по этим окружностям: на первой окружности – 6, на второй – 12, на третьей – 18, на четвертой – 25 и на пятой – 31 луч. На рис. 3 эти окружности выделены вертикальными полосами. Радиусы  $h$  окружностей составляют от  $0.1r$  до  $0.5r$ , где  $r$  – радиус поверхности.

Расчеты проводились как для плоскости предмета, проходящей через апланатическую точку, так и для оптимизированной по меридиональной плоскости схеме ( $s = 1.6509r$ ). В масштабе рис. 6 различие практически не заметно. Меридиональ-

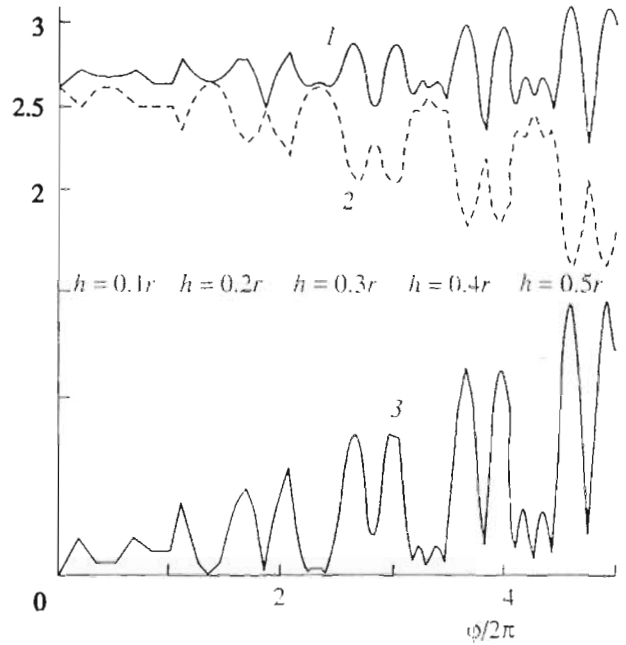


Рис. 6. Значения аппликат точек двух фокальных поверхностей для лучей широкого пучка, образующих 5 concentрических окружностей ( $h$  – радиусы окружностей) на передней главной плоскости: 1 –  $s'_1/r$ , 2 –  $s'_2/r$ , 3 – соответствующая астигматическая разность  $\Delta s'/r$ . Гауссова плоскость изображения –  $2.5r$ .

ная плоскость находится на расстояниях  $\pi/2$  от границ полных оборотов лучей по окружностям. На первой окружности меридиональная плоскость не попала в число 6 лучей, а на последующих минимумы соответствуют положению лучей на меридиональной плоскости. Первый из наиболее глубоких минимумов соответствует ближайшему к внеосевой точке предмета лучу, а последний минимум в полосе – самому дальнему меридиональному лучу.

В заключение отметим, что составление углового эйконала последовательности оптических поверхностей и исследование с помощью него оптической системы не представляет принципиальных трудностей и будет рассмотрено в следующей работе. Применение точных выражений углового эйконала, по нашему мнению, позволяет переместить центр оптимизации оптической системы в аналитическую область, а расчеты хода лучей через систему при этом играют вспомогательную роль. Во-вторых, повышается эффективность и надежность процесса оптимизации вследствие повышения точности вычисления aberrаций. В-третьих, отпадает необходимость в поиске удобных и надежных целевых функций – в качестве последних могут быть использованы любые из рассмотренных интегральных aberrаций.



ций, наклонная астигматическая разность либо связанные с ней характеристики: астигматизм и кривизна поля, а также их комбинация.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
2. Русинов М.М. Техническая оптика. Л.: Машиностроение, 1979.
3. Смирнов А.П. // Опт. и спектр. 2006. Т. 101. № 2.
4. Sasian J.M. // Opt. Engin. 1994. V. 33. № 6. P. 2045–2061.
5. Смирнов А.П. // Опт. и спектр. 2004. Т. 97. № 6. С. 1043–1049.
6. Слюсарев Г.Г. Геометрическая оптика. АН СССР, 1946.
7. Чуриловский В.Н. Теория оптических приборов. М.: Машиностроение, 1966.
8. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976.