

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Вопросы к экзамену (1-й семестр)

Введение

- (о). Понятие «множества» в рамках наивной теории множеств. Элемент множества, принадлежность множеству. Подмножество, равные множества, способы задания множеств, пустое множество.
- (о). Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность. Упорядоченная пара, прямое произведение двух множеств. Упорядоченные наборы (n -ки), прямое произведение n множеств.
- (о). Отображение, область определения отображения, значение отображения, множество значений, образ множества под действием отображения, полный прообраз множества под действием отображения, полный прообраз элемента под действием отображения.
- (о). График отображения. Композиция двух отображений. Сюръективное отображение (отображение на). Инъективное (взаимно однозначное) отображение. Биективное отображение. Обратное отображение.
- (о). Четная функция. Нечетная функция.
- (у). Правила преобразования графиков.
- (о). Высказывание. Операции над высказываниями: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, равносильность.
- (о). Высказывание с переменными. Высказывание (все)общности. Высказывание существования.
- (о). Теорема и доказательство. Критерий. Необходимое условие. Достаточное условие.
- (о). Метод доказательства от противного.
- (у). Математическая индукция.
- (о). Факториал. Число перестановок. Число размещений. Число сочетаний (биномиальные коэффициенты).
- (у). Лемма Паскаля. Бином Ньютона.
- (у). Неравенство Бернулли.

1. Предел и непрерывность функций одной переменной

- (о). Вещественные числа. Иррациональные числа.
- 1.1 (у). Аксиома полноты — теорема Дедекинда о полноте вещественных чисел.
- 1.2 (о). Отрезок (замкнутый промежуток), интервал (открытый промежуток), полуинтервал (полуоткрытый промежуток), промежуток.
- 1.3 (у). Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши — Кантора).
- 1.4 (о). Ограниченное снизу множество, нижняя граница. Ограниченное сверху множество, верхняя граница. Ограниченное множество.
- 1.5 (упр). Доказать, что множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует число $c > 0$ такое, что $|x| \leq c$ для любого $x \in X$.
- 1.6 (о). Минимум множества. Максимум множества.
- 1.7 (у). Теорема Дедекинда о существовании наибольшей нижней границы и наименьшей верхней границы.
- 1.8 (упр). Доказать п. 1 (существование наибольшей нижней границы) теоремы Дедекинда о существовании наибольшей нижней границы и наименьшей верхней границы.
- 1.9 (о). Точная нижняя граница (нижняя грань, инфимум). Точная верхняя граница (верхняя грань, супремум).
- 1.10 (о). Расширенная числовая прямая.
- 1.11 (у). Теорема о точных границах в $\overline{\mathbb{R}}$.
- 1.12 (упр). 1. Доказать теорему о точных границах в $\overline{\mathbb{R}}$. 2. Показать, что $\inf X = -\infty$ для непустого неограниченного снизу множества $X \subset \mathbb{R}$. 3. Показать, что $\sup X = +\infty$ для непустого неограниченного сверху множества $X \subset \mathbb{R}$. 4. Показать, что $\inf \emptyset = +\infty$ и $\sup \emptyset = -\infty$.
- 1.13 (у). Критерий для точных границ.
- 1.14 (упр). Доказать п. 1 (случай $\inf X = a$) критерия для точных границ.
- 1.15 (у). Принцип Архимеда.
- 1.16 (упр*). Доказать принцип Архимеда.
- 1.17 (о). Последовательность.
- 1.18 (о). Конечный предел последовательности.
- 1.19 (пр). Пример, сходящейся последовательности.
- 1.20 (о). Бесконечные пределы последовательности: $x_n \rightarrow +\infty$, $x_n \rightarrow -\infty$, $x_n \rightarrow \infty$.
- 1.21 (з). Замечание о стремлении и сходимости.
- 1.22 (о). Расходящаяся последовательность.
- 1.23 (з). Замечание о расходящихся последовательностях.
- 1.24 (упр). 1. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. А обратное, вообще говоря, не верно. 2. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. 3. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

- 1.25 (о). Бесконечно большая последовательность. Бесконечно малая последовательность.
- 1.26 (упр). Пусть $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность x_n бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $\frac{1}{x_n}$ бесконечно большая.
- 1.27 (о). Ограниченная последовательность.
- 1.28 (упр). Последовательность $(x_n \in \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничено множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- 1.29 (у). Теорема о пределе последовательности и неравенстве.
- 1.30 (з). Замечание о предельном переходе в неравенстве.
- 1.31 (у). Следствие о единственности предела.
- 1.32 (у). Теорема о зажатой последовательности.
- 1.33 (у). Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
- 1.34 (упр). 1. Доказать теорему о пределе последовательности и неравенстве для случая $a \in \mathbb{R}$ и $b = +\infty$. 2. Доказать теорему о пределе последовательности и неравенстве для случая $a = -\infty$ и $b \in \mathbb{R}$. 3. Доказать теорему о пределе последовательности и неравенстве для случая $a = -\infty$ и $b = +\infty$. 4. Доказать следствие о единственности предела для случаев $a = b = \pm\infty$. 5. Доказать теорему о зажатой последовательности для случаев $a = \pm\infty$.
- 1.35 (у). Теорема о бесконечно малых.
- 1.36 (у). Теорема о пределе последовательности и алгебраических операциях.
- 1.37 (о). Подпоследовательность.
- 1.38 (о). Частичный предел последовательности.
- 1.39 (у). Теорема о пределе подпоследовательности, имеющей предел.
- 1.40 (упр). Доказать теорему о пределе подпоследовательности, имеющей предел, для случаев $a = \pm\infty$.
- 1.41 (у). Теорема Больцано — Вейерштрасса.
- 1.42 (у). Следствие из теоремы Больцано — Вейерштрасса.
- 1.43 (з). Замечание о непустоте множества частичных пределов любой последовательности.
- 1.44 (о). Верхний и нижний предел последовательности.
- 1.45 (о). Неубывающая последовательность. Невозрастающая последовательность. Возрастающая последовательность. Убывающая последовательность. Монотонная последовательность. Строго монотонная последовательность.
- 1.46 (у). Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности.
- 1.47 (о). Фундаментальная последовательность (сходящая в себе последовательность, последовательность Коши). Условие Коши.
- 1.48 (у). Критерий Коши сходимости последовательности.
- 1.49 (з). Замечание об определении сходимости последовательности.
- 1.50 (пр). Пример расходящейся ограниченной последовательности.
- 1.51 (о). Конечная предельная точка (точка сгущения). Конечная предельная точка (точка сгущения) слева. Конечная предельная точка (точка сгущения) справа. Предельные точки $\pm\infty$.
- 1.52 (з). Замечания о предельных точках.
- 1.53 (о). Конечный предел функции в точке сгущения.
- 1.54 (о). Конечный предел слева функции в точке сгущения. Конечный предел справа функции в точке сгущения.
- 1.55 (з). Замечание о связи существования предела с существованием односторонних пределов.
- 1.56 (о). Конечный предел функции на бесконечности.
- 1.57 (о). Бесконечные пределы $\pm\infty$ и ∞ функции в точке сгущения.
- 1.58 (з). Замечание об определении бесконечных пределов слева и справа и при $x \rightarrow \pm\infty$.
- 1.59 (о). Окрестность и проколтая окрестность для конечной точки и для бесконечно удаленных точек $\pm\infty$.
- 1.60 (у). Определение предельной точки на языке окрестностей.
- 1.61 (у). Определение предела функции на языке окрестностей.
- 1.62 (у). Теорема об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне.
- 1.63 (упр). 1. Доказать теорему об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне в случае, когда $a \in \mathbb{R}$ и $l = \pm\infty$. 2. Доказать теорему об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне в случае, когда $a = \pm\infty$ и $l \in \mathbb{R}$. 3. Доказать теорему об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне в случае, когда $a = \pm\infty$ и $l = \pm\infty$.
- 1.64 (у). Теорема о пределе функции и неравенстве.
- 1.65 (з). Замечание о нестрогости неравенства в теореме о пределе функции и неравенстве.
- 1.66 (упр). 1. Опираясь на теорему о пределе последовательности и неравенстве и теорему об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне, докажите теорему о пределе функции и неравенстве. 2. В теореме о пределе последовательности и неравенстве было две части, а для функций в теореме о пределе функции и неравенстве сформулирована только одна из них. Вторая часть для функций также верна и формулируется аналогично. Сформулируйте эту часть для функций и докажите ее.
- 1.67 (у). Теорема о зажатой функции.
- 1.68 (упр). Опираясь на теорему о зажатой последовательности и теорему об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне, докажите теорему о пределе зажатой функции.
- 1.69 (у). Теорема о пределе функции и алгебраических операциях.
- 1.70 (упр). Опираясь на теорему о пределе последовательности и алгебраических операциях и теорему об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне, докажите теорему о пределе функции и алгебраических операциях.
- 1.71 (у). Критерий Коши для предела функции.

- 1.72 (упр). Опираясь на критерий Коши сходимости последовательности и теорему об эквивалентности определений предела по Коши и Гейне, докажите критерий Коши для предела функции.
- 1.73 (у). Теорема о пределе композиции.
- 1.74 (упр). Докажите теорему о пределе композиции для случаев, когда 1) $a, b \in \mathbb{R}, l = \pm\infty$; 2) $a, l \in \mathbb{R}, b = \pm\infty$; 3) $a = \pm\infty, b, l \in \mathbb{R}$; 4) $a \in \mathbb{R}, b, l = \pm\infty$; 5) $a, l = \pm\infty, b \in \mathbb{R}$; 6) $a, b = \pm\infty, l \in \mathbb{R}$; 7) $a, b, l = \pm\infty$.
- 1.75 (о). Асимптотические сравнения o -малое и O -большое.
- 1.76 (з). Замечание об определении сравнений o -малое и O -большое в случае, когда функция $g(x)$ не обращается в нуль.
- 1.77 (з). Замечание об использовании символов $o(f(x))$ и $O(f(x))$.
- 1.78 (у). Правила работы с o -малыми и O -большими.
- 1.79 (упр). Доказать пп. 4) и 5) правил работы с o -малыми и O -большими.
- 1.80 (з). Замечание о разности o -малых.
- 1.81 (у). Теорема о сравнении показательной, степенной и логарифмической функций.
- 1.82 (о). Главная часть.
- 1.83 (з). Замечание о выделении главной части.
- 1.84 (з). Замечание о главной части, которая не обращается в нуль.
- 1.85 (о). Эквивалентные функции.
- 1.86 (у). Теорема о главных частях элементарных функций.
- 1.87 (у). Теорема о формулах Тейлора для элементарных функций.
- 1.88 (у). Правило Бернулли — Лопиталя.
- (о) Элементарные функции.
- 1.89 (у). Теорема о существовании предела $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$.
- 1.90 (о). Экспоненциальная (показательная) функция. Число e .
- 1.91 (у). Теорема о свойствах показательной функции.
- 1.92 (упр). Доказать п.1)–4) теорема о свойствах показательной функции.
- 1.93 (з). Замечание о равенстве $e^x = \exp(x)$.
- 1.94 (о). Натуральный логарифм.
- 1.95 (у). Теорема о свойствах логарифма.
- 1.96 (упр). Доказать п.1)–4) теорема о свойствах логарифма.
- 1.97 (о). Степень с произвольным основанием.
- 1.98 (о). Степенная функция.
- 1.99 (з). Замечание об определении степенной функции.
- 1.100 (у). Замечательный предел для степенной функции.
- 1.101 (о). Тригонометрические функции.
- 1.102 (у). Замечательный предел для $\sin x$.
- 1.103 (о). Непрерывность функции в точке.
- 1.104 (з). Замечание о непрерывности в изолированной точке.
- 1.105 (з). Замечание о непрерывности в точке сгущения, которая не принадлежит области определения функции.
- 1.106 (о). Точка разрыва, разрыв первого и второго рода, устранимый разрыв.
- 1.107 (у). Теорема о непрерывности в точке и алгебраических операциях и композиции.
- 1.108 (з). Замечание о непрерывности элементарных функций.
- 1.109 (о). Непрерывность функции на множестве.
- 1.110 (у) Теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях.
- 1.111 (з) Замечание о промежуточных значениях непрерывной функции.
- 1.112 (у). Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях.

2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

- 2.1 (о). Производная функции в точке. Производная функции (на промежутке).
- 2.2 (з). Замечание об использовании термина производная.
- 2.3 (з). Замечание о непрерывности функции, имеющей производную.
- (з) Физическая интерпретация производной.
- (з) Геометрическая интерпретация производной. Секунда. Касательная.
- 2.4 (о). Дифференцируемость в точке. Дифференциал.
- 2.5 (з). Замечание о дифференциале.
- 2.6 (з). Замечание о линейных и аффинных функциях.
- 2.7 (з). Замечание о рассмотрении дифференциала как главной линейной части приращения.
- 2.8 (з). Замечание о записи равенства, характеризующего дифференциал, через аргумент функции.
- 2.9 (з). Замечание о сравнении равенства, характеризующего дифференциал, с уравнением касательной.
- 2.10 (у). Теорема о производной и дифференциале.
- 2.11 (з). Замечание о форме записи дифференциала.
- 2.12 (у). Теорема о производной и алгебраических операциях.
- 2.13 (упр). Доказать пп. 1) и 3) теоремы о производной и алгебраических операциях.
- 2.14 (у). Теорема 2.14 о производной композиции.

- 2.15 (у). Теорема о производной обратной функции.
- 2.16 (у). Теорема о производных элементарных функций.
- 2.17 (о). Локальный максимум. Локальный минимум. Локальный экстремум.
- 2.18 (о). Внутренняя точка промежутка.
- 2.19 (з). Замечание о внутренних точках промежутка.
- 2.20 (у). Теорема Ферма о необходимом условии локального экстремума.
- 2.21 (у). Теорема Ролля.
- 2.22 (з). Замечание о физической интерпретации теоремы Ролля.
- 2.23 (у). Теорема Лагранжа о конечном приращении.
- (з) Замечание о геометрической интерпретации теоремы Лагранжа.
- 2.24 (у). Следствие о конечном приращении.
- 2.25 (у). Теорема Коши о конечном приращении.
- 2.26 (з). Замечание о том, что теорема Коши обобщает теорему Лагранжа.
- 2.27 (з). Замечание о геометрической интерпретации теоремы Коши.
- 2.28 (о). Старшие производные.
- 2.29 (з). Замечание о том, что для определения производной порядка k в некоторой точке x_0 надо иметь производные порядка $k - 1$ в точках x из некоторой окрестности точки x_0 .
- 2.30 (у). Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
- 2.31 (о). Полином Тейлора и остаточный член в формуле Тейлора.
- 2.32 (з). Замечание о представлении остаточного члена в формуле Тейлора в форме Лагранжа.
- 2.34 (з). Замечание о зависимости точки ξ от точки x в теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
- 2.34 (з). Замечание об общей форме для остаточного члена в формуле Тейлора.
- 2.35 (у). Теорема формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
- 2.36 (з). Замечание о представлении остаточного члена в формуле Тейлора в форме Пеано.
- 2.37 (з). Замечание о выборе формы представления остаточного члена в формуле Тейлора.
- 2.38 (з). Замечание о формуле Тейлора и ряде Тейлора.
- 2.39 (у). Теорема о формулах Тейлора для элементарных функций.
- 2.40 (у). Теорема о достаточном условии локального экстремума.
- 2.41 (упр). Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет производную $f^{(2n)}(x)$ на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Доказать, что 1) если $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(2n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка (строгого) локального минимума; 2) если $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(2n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка (строгого) локального максимума; 3) если $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = f^{(2n)}(x_0) = 0$, то ничего об экстремуме в точке x_0 утверждать невозможно.
- 2.42 (упр). Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет производную $f^{(2n+1)}(x)$ на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Доказать, что если $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n)}(x_0) = 0$ и $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, то x_0 не является точкой локального экстремума
- 2.43 (у). Критерий монотонности.
- 2.44 (упр). Доказать пп. 3)–5) критерия монотонности.
- 2.45 (о). Выпуклая функция. Строго выпуклая функция. Выпуклая комбинация точек.
- 2.46 (о). Вогнутая функция. Строго вогнутая функция.
- 2.47 (з). Замечание об используемой терминологии для выпуклых и вогнутых функций.
- 2.48 (з). Замечание о геометрическом смысле выпуклости функции.
- 2.49 (о). Выпуклое множество.
- 2.50 (о). Надграфик функции.
- 2.51 (з). Замечание о геометрическом смысле выпуклости функции с использованием надграфика.
- 2.52 (у). Критерий выпуклости функции.
- 2.53 (з). Замечание о других критериях выпуклости, полученных при доказательстве критерия выпуклости функции.
- 2.54 (у). Другое определение выпуклости.
- 2.55 (у). Критерий выпуклости в терминах первой производной.
- 2.56 (з). Замечание о полезности свойства выпуклости.
- 2.57 (упр). Доказать, что для любых $x_1, x_2 > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, справедливы неравенства: 1) $\ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2$; 2) $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$; 3) $\frac{1}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \leq \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2}$. В частности, для $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ получаем неравенства $\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$, связывающие среднее гармоническое (в левой части), среднее геометрическое (в центральной) и среднее арифметическое (в правой).
- 2.58 (упр). Неравенство Юнга. Докажите для $a, b > 0$ и $p, q > 1$ таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, справедливость неравенства Юнга $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
- 2.59 (упр). Неравенство Йенсена. Докажите, что для выпуклой функции $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ верно более общее, чем в ее определении, неравенство, а именно для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in \langle a, b \rangle$ и любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, верно неравенство Йенсена $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$. Оно аналогично неравенству выпуклости, но в отличие от него содержит n элементов вместо двух. Доказательство неравенства Йенсена можно провести по индукции.
- 2.60 (упр). Используя неравенство Йенсена, доказать, что для $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ справедливо неравенство $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.
- 2.61 (о). Точка перегиба.
- 2.62 (о). Вертикальная асимптота. Наклонная асимптота.

- 2.63 (з). Замечание об аналогичности рассмотрения случаев $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.
- 2.64 (у). Нахождение наклонных асимптот.
- 2.65 (у). Правило Бернулли — Лопиталя.
- 2.66 (у). Теорема о методе Ньютона (методе касательных).
- 2.67 (о). Первообразная (неопределенный интеграл). Обобщенная первообразная.
- 2.68 (з). Замечание об интеграле и первообразной.
- 2.69 (з). Замечание о том, что добавление к функции константы не меняет ее производной.
- 2.70 (у). Теорема о множестве первообразных.
- 2.71 (з). Замечание о рассмотрении первообразных только на промежутке.
- 2.72 (з). Замечание об обозначении первообразной.
- (у) Таблица простейших неопределенных интегралов.
- 2.73 (у). Теорема о линейности первообразных.
- 2.74 (у). Теорема о формуле интегрирования по частям для первообразной.
- 2.75 (з). Замечание о записи формулы интегрирования по частям.
- 2.76 (у). Теорема о замене и подстановке в неопределенном интеграле.
- 2.77 (з). Замечание об обратимости функции в формуле подстановки.
- 2.78 (з). Замечание об использовании замены.
- 2.79 (пр). Пример на замену в неопределенном интеграле.
- 2.80 (з). Гиперболические функции.
- 2.81 (пр). Пример на подстановку в неопределенном интеграле.
- 2.82 (о). Рациональная функция.
- 2.83 (у). Теорема о первообразной рациональной функции.
- 2.84 (о). Простейшая дробь.
- 2.85 (з). Замечание о разложении рациональной функции на простейшие дроби.
- 2.86 (у). Утверждение о первообразной вида $\int \frac{dx}{(x-x_0)^k}$.
- 2.87 (у). Утверждение о первообразной вида $\int \frac{u du}{(u^2+a^2)^k}$.
- 2.88 (у). Утверждение о рекуррентной формуле для первообразной вида $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}$.
- 2.89 (о). Обыкновенное дифференциальное уравнение. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.
- 2.90 (о). Уравнение с разделяющимися переменными.
- (у). Решения уравнение с разделяющимися переменными. Начальное условие. Задача Коши.
- 2.91 (о). Линейное дифференциальное уравнение второго порядка.
- (о). Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.
- (у). Решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Начальные условия. Задача Коши.
- 2.92 (з). Количество начальных условий в зависимости от порядка уравнения для единственности решения.

3. Интеграл Римана

- 3.1 (о). Разбиение отрезка и разбиение с выделенными точками.
- 3.2 (о). Функция, интегрируемая по Риману, и ее интеграл. Интегральная сумма Римана.
- 3.3 (з). Замечание о высказывании, что интеграл Римана — это предел интегральных сумм.
- 3.4 (з). Замечание о геометрической интерпретации интеграла.
- 3.5 (о). Верхняя и нижняя суммы Дарбу.
- 3.6 (з). Замечание о геометрической интерпретации интегральных сумм Дарбу.
- 3.7 (у). Критерий Дарбу.
- 3.8 (упр). Доказать критерий Дарбу.
- 3.9 (з). Замечание о необходимом условии интегрируемости.
- 3.10 (пр). Пример ограниченной неинтегрируемой по Риману функции. Функция Дирихле.
- 3.11 (у). Теорема о линейности и аддитивности интеграла.
- 3.12 (упр). Доказать теорему о линейности и аддитивности интеграла.
- 3.13 (у). Теорема об интегрируемости непрерывной и монотонной функций.
- 3.14 (упр*). Доказать теорему об интегрируемости непрерывной и монотонной функций.
- 3.15 (у). Теорема о монотонности интеграла.
- 3.16 (упр). Доказать теорему о монотонности интеграла.
- 3.17 (з). Замечание о свойстве положительности интеграла.
- 3.18 (у). Первая теорема о среднем.
- 3.19 (з). Замечание о геометрическом смысле теоремы о среднем для случая $g(x) = 1$.
- 3.20 (з). Замечание об использовании теоремы о среднем для оценок.
- 3.21 (у). Теорема о связи интеграла и первообразной.
- 3.22 (з). Замечание о существенности условия непрерывности подынтегральной функции в утверждении 2) теоремы о связи интеграла и первообразной.

- 3.23 (у). Теорема о формуле Ньютона — Лейбница.
- 3.24 (у). Теорема о формуле Тейлора с интегральным остаточным членом.
- 3.25 (з). Замечание о получении из интегрального вида остаточного члена с помощью теоремы о среднем формы Лагранжа.
- (о). Особая точка для подынтегральной функции.
- 3.26 (о). Интегрируемость функции в несобственном смысле. Несобственный интеграл. Расходимость интеграла.
- 3.27 (о). Абсолютная и условная сходимости несобственного интеграла.
- 3.28 (у). Теорема критерий Коши сходимости несобственного интеграла.
- 3.29 (з). Замечание о пределе в случае несобственного интеграла.
- 3.30 (у). Теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла.
- 3.31 (у). Теорема об интегрировании основных особенностей.
- 3.32 (у). Теорема мажорантный признак и теорема сравнения.
- 3.33 (пр). Примеры на исследование сходимости интегралов.
- 3.34 (у). Теорема о признаках Абеля и Дирихле для несобственных интегралов.
- (упр*). Доказательство теорема о признаках Абеля и Дирихле для несобственных интегралов без дополнительных условий.
- 3.35 (пр). Пример исследования сходимости интеграла с помощью признака Дирихле.
- (о). Сходимость несобственного интеграла, имеющего несколько особенностей..
- 3.36 (пр). Пример исследования сходимости интеграла, имеющего несколько особенностей.
- 3.37 (о). Сходимость несобственного интеграла в смысле главного значения.
- 3.38 (пр). Примеры исследования сходимости интеграла в смысле главного значения.
- 3.39 (о) Эйлеровы интегралы: Γ - и B -функции.
- 3.40 (у). Теорема о свойствах Γ - и B -функций.
- 3.41 (упр*). Доказать пп. 3 и 5 теоремы о свойствах Γ - и B -функций.
- 3.42 (з). Замечания о свойствах функции Γ .
- 3.43 (з). Замечание о формуле Стирлинга.
- 3.44 (пр). Примеры о выражении интегралов через эйлеровы интегралы. Интеграл Эйлера — Пуассона (интеграл Гаусса).
- (у) Формула для вычисления площади подграфика.
- 3.45 (пр). Вычисление площади плоской фигуры.
- (у) Формула для вычисления площади фигуры, ограниченной кривой в полярных координатах.
- (у) Формула для вычисления массы и центра тяжести стержня. Нулевой и первый моменты.
- (у) Формула для вычисления объём тела вращения.
- 3.46 (пр). Вычисление объём трехмерного шара.
- 3.47 (о). Параметризованная кривая. Параметризация и ее компоненты.
- 3.48 (з). Замечание о предположении о непрерывности производных компонент параметризации и о векторе мгновенной скорости.
- (у) Формула для вычисления длины кривой.
- 3.49 (з). Замечание о параметризациях кривой.
- 3.50 (у). Теорема о длине кривой.
- 3.51 (з). Замечание о замене времени.
- 3.52 (з). Замечание об убывающих функциях t и τ при замене времени.
- 3.53 (у). Формула для вычисления длины графика функции.
- 3.54 (пр). Пример вычисления длины кривой.
- 3.55 (о). Эллиптические интегралы.

4. Числовые и функциональные ряды

- 4.1 (о). Числовой ряд. Частичная сумма ряда. Общий член ряда. Сходимость ряда. Сумма ряда.
- 4.2 (з). Замечание об определении ряда.
- 4.3 (у). Критерий Коши сходимости числового ряда.
- 4.4 (у). Теорема о необходимом условии сходимости ряда.
- 4.5 (з). Замечание о сравнении ряда с несобственным интегралом.
- 4.6 (о). Абсолютная и условная сходимости числового ряда.
- 4.7 (з). Замечание о взаимосвязи сходимости числового ряда с его абсолютной или условной сходимостью.
- 4.8 (у). Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда.
- 4.9 (у). Мажорантный признак сходимости числового ряда и теорема сравнения для сходимости числового ряда.
- 4.10 (у). Теорема об интегральном признаке сходимости числового ряда.
- 4.11 (у). Теорема о сходимости эталонных числовых рядов.
- 4.12 (з). Замечание о сравнении рядов из п. 3) теоремы о сходимости эталонных числовых рядов с гармоническим рядом.
- 4.13 (з). Замечание о гармоническом ряде.
- 4.14 (у). Теорема о признаке Коши сходимости числового ряда.
- 4.15 (з). Замечание о п. 3) теоремы о признаке Коши сходимости числового ряда.

- 4.16 (у). Теорема о признаке Даламбера сходимости числового ряда.
- 4.17 (пр). Пример на исследование сходимости числового ряда с помощью признака Коши.
- 4.18 (пр). Пример на исследование сходимости числового ряда с помощью признака Даламбера.
- 4.19 (з). Еще одно замечание о ряде Тейлора.
- 4.20 (у). Теорема о признаках Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов.
- 4.21 (у). Теорема о признаке Лейбница.
- 4.22 (пр). Исследования сходимости числового ряда с помощью признака Дирихле.
- 4.23 (о). Поточечная сходимость функциональной последовательности на множестве.
- 4.24 (з). Замечание о зависимости при поточечной сходимости скорости сходимости последовательности значений $f_n(x)$ от выбора точки x .
- 4.25 (о). Равномерная сходимость функциональной последовательности на множестве.
- 4.26 (з). Замечание о разнице между поточечной и равномерной сходимостями.
- 4.27 (пр). Пример сходящейся поточечно на отрезке последовательности функций, но не равномерно.
- 4.28 (пр). Пример равномерно сходящейся на $\mathbb{R}$ последовательности функций, производные которых образуют также равномерно сходящуюся на $\mathbb{R}$ последовательность.
- 4.29 (пр). Пример равномерно сходящейся на $\mathbb{R}$ последовательности функций, производные которых уже не сходятся поточечно на всем $\mathbb{R}$.
- 4.30 (у). Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.
- 4.31 (упр). Доказать критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.
- 4.32 (у). Теорема о равномерном пределе последовательности непрерывных функций.
- 4.33 (о). Равномерная норма.
- 4.34 (упр). Доказать, что $f_n \Rightarrow f$ на X тогда и только тогда, когда $\|f_n - f\| \rightarrow 0$.
- 4.35 (з). Замечание о пространстве непрерывных функций.
- 4.36 (о). Поточечная и равномерная сходимости функционального ряда.
- 4.37 (з). Замечание о равномерной сходимости частичных сумм функционального ряда.
- 4.38 (у). Теорема о непрерывности суммы ряда.
- 4.39 (у). Теорема о дифференцируемости функционального ряда.
- 4.40 (у). Теорема об интегрировании функционального ряда.
- 4.41 (у). Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.
- 4.42 (у). Теорема о мажорантном признаке Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
- 4.43 (пр). Пример исследования равномерной сходимости ряда.
- 4.44 (о). Степенной ряд.
- 4.45 (з). Замечание о степенных рядах комплексного аргумента.
- 4.46 (з). Замечание о сдвиге центра ряда в начало координат.
- 4.47 (у). Теорема о сходимости степенного ряда.
- 4.48 (з). Замечание о формуле Коши — Адамара. Интервал сходимости. Круг сходимости.
- 4.49 (пр). Примеры нахождения радиуса сходимости степенных рядов, сходимости или расходимости степенного ряда в концах интервала сходимости или на границе круга сходимости.
- 4.50 (у). Теорема об интегрировании степенного ряда.
- 4.51 (о). Пространства $C^k((a, b))$, $k \in \mathbb{N}$, и $C^\infty((a, b))$.
- 4.52 (з). Замечание о пространстве $C^0((a, b))$ и соотношениях между пространствами $C^k((a, b))$, $k \in \mathbb{N}$, и $C^\infty((a, b))$.
- 4.53 (о). Ряд Тейлора. Ряд Маклорена.
- 4.54 (у). Теорема о дифференцировании степенного ряда.
- 4.55 (у). Ряды Тейлора основных элементарных функций.
- 4.56 (пр). Пример использования теоремы об интегрировании степенного ряда. Интегральный синус.
- 4.57 (пр). Пример использования теоремы о дифференцировании степенного ряда. Функция Бесселя.

Пояснения к вопросам

- (о) определение понятия;
- (у) утверждение (теорема, лемма и т.п.);
- (упр) упражнение;
- (упр*) упражнение повышенной трудности;
- (з) замечание;
- (пр) пример.

Студент должен обязательно знать все вопросы с определениями понятий (о) и формулировками утверждений (теорем, лемм и т.п.) (у).

Теоретическая часть экзаменационного билета включает в себя первую часть (определение понятий), состоящую из 4 определений (о), вторую часть (формулировки утверждений (теорем, лемм и т.п.)), включающую 2 формулировки (у), и третью часть (при дистанционной сдаче решение упражнения), включающее решение 1 упражнения (упр). Если упражнение состоит из нескольких пунктов, то в билет будет включаться только один пункт. Упражнения будут только те, которые были сформулированы на лекциях и включены в список вопросов. Упражнения повышенной трудности (упр*) в билеты включаться не будут. Возможно некоторые упражнения или их пункты также будут отнесены к упражнениям повышенной сложности, о чем будет сообщено на консультации.

Система оценивания по курсу «Основы математического анализа»

Итоговая оценка ставится по количеству набранных баллов за практическую часть и теоретическую часть. Практика состоит из работы на семинарах, решении ежемесячных заданий и потоковых работ. Теоретическая часть сдается на экзамене. В процентном соотношении максимальное возможное количество баллов за практику и за теорию составляет примерно 60% и 40% соответственно.

Работа на семинарах (оценивается каждым семинаристом индивидуально, мах 100 баллов)

Ежемесячные задания (31 задача, мах 228 баллов)/

Потоковая работа (5 задач по 90 баллов за задачу, мах 450 баллов).

Теоретический экзамен (Пояснения даны ниже, мах 530 баллов)

К экзамену необходимо сдать в срок не менее половины ежемесячных заданий и набрать на потоковых контрольных не менее 90 баллов. Пока эти условия не выполнены студент не начинает сдавать теоретическую часть.

Теоретическая часть экзаменационного билета состоит из трех частей: определения понятий (4 определения), формулировки утверждений (теорем, лемм и т.п.) (2 утверждения) и доказательство теоремы (при очной форме сдачи экзамена) или решение упражнения (при дистанционной форме сдачи экзамена) (1 доказательство или решение упражнения). Студент отправляется на пересдачу, если он не ответил на первую часть билета, т.е. не знает хотя бы одного определения из билета. Баллы по каждой части билета следующие: Определения – 120 баллов, формулировки теорем – 160 баллов, доказательство – 250 баллов.

Итоговая оценка: «5» ≥ 1130 баллов «4» ≥ 820 баллов «3» ≥ 400 баллов

Доцент А. А. Егоров

(редакция от 13.01.2021)