Введение.
Математический анализ — фундаментальный раздел математики, что ведет свой отсчёт от XVII века, когда были положены основы теории бесконечно малых. Современный математический анализ включает в себя также теорию функций, теорию рядов, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения и дифференциальную геометрию. Математический анализ стал выдающейся вехой в истории науки и сформировал лицо современной математики. Анализ быстро превратился в мощнейший инструмент для исследователей естественных наук, а также стал одним из двигателей научно-технической революции.

Множества и числа.

Понятие «множества» будем принимать на интуитивном уровне (называемом наивной теорией множества) как «совокупность или набор некоторых объектов, рассматриваемых как единое целое». При работе с множествами всегда подразумевается, что состав любого множества вполне определен, т. е. для любого объекта x и любого множества M либо $x \in M$, либо $x \notin M$, и в случае $x \in M$ говорят, что x принадлежит множеству M или что x — элемент множества M.

Если любой элемент множества A содержится в множестве B, то A называется подмножеством B и обозначается $A \subset B$.

Множества считаются равными, если они имеют один состав, иначе говоря $A = B$ означает, что $A \subset B$ и $B \subset A$.

Множество можно задать просто перечислением его элементов $\{a, b, c, \ldots\}$.

Другой способ — выделить все объекты x, обладающие некоторым свойством $P(x)$:
$\{x : \; P(x)\}$.
Например, пустое множество $\emptyset = \{x : \; x \neq x\}$.
Если все выделяемые объекты x берут из заданного множества M, то $\{x \in M : \; P(x)\} := \{x : \; x \in M, \; P(x)\}$.

Операции над множествами.

$A \cup B := \{x : \; x \in A$ или $x \in B\}$ — объединение;
$A \cap B := \{x : \; x \in A$ и $x \in B\}$ — пересечение;
$A \setminus B := \{x : \; x \in A$ и $x \notin B\}$ — разность;
$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — симметрическая разность.

Имея два элемента a и b (вообще говоря, разных множеств), можно назвать a первым, а b — вторым, и образовать новый элемент (a, b), называемый упорядоченной парой. При этом упорядоченные пары (a, b) и (c, d) равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$. Множество $A \times B := \{(a, b) : \ a \in A, \ \ b \in B\}$ называется прямым произведением множеств A и B. При этом $A^2 = A \times A$ называют квадратом множества A. Аналогично определяются упорядоченные наборы (n-ки) $(a_1, \ldots, a_n)$, прямые произведения n множеств $A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) : \ a_1 \in A_1, \ \ldots, \ a_n \in A_n\}$, а также n-ю степень $A^n := A \times \ldots \times A$ (n раз) множества A.

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество вещественных (или действительных) чисел;
$\mathbb{C}$ — множество комлексных чисел.

Отображения и функции.
Пусть X и Y — множества (произвольной природы). Отображением, определённым (заданным) на множестве X и действующим в множество Y, называют правило, согласно которому каждому элементу x множества X сопоставляется какой-то один, вполне определенный, элемент y множества Y. Мы в случае, когда X и/или Y — числовые множества, об отображении множества X в множество Y будем говорить как о функции.

Правило, задающее отображение, обозначают буквами, например, f и кратко записывают $f : X \to Y$. При этом множество X, на элементы которого распространяется действие правила (отображения), называют областью определения отображения f и обозначают через $\mathrm{dom}(f)$. Элемент, получаемый в результате действия отображения f на элемент $x \in X$, называют значением отображения f на элементе x и обозначают $f(x)$. При этом также пишут $f : x \mapsto f(x)$. Множество $\mathrm{im}(f) := \{f(x) : \ x \in \mathrm{dom}(f)\} \subset Y$ называется множеством значений отображения f.

Пусть $f : X \to Y$.
Для $A \subset X = \mathrm{dom}(f)$ множество $f(A) := \{f(x) : \ x \in A\}$ называется образом множества A под действием отображения f.
Для $B \subset Y$ множество $f^{-1}(B) := \{x \in \mathrm{dom}(f) : \ f(x) \in B\}$ называется полным прообразом множества B под действием отображения f.
Для $y \in Y$ $\ f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$.
Справедливы равенства:
$f(\mathrm{dom}(f)) = \mathrm{im}(f)$;
$f^{-1}(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{dom}(f)$;
$f^{-1}(Y) = \mathrm{dom}(f)$.

Подмножество $G(f) := \{(x, f(x)) : \ x \in \mathrm{dom}(f)\}$ прямого произведения $X \times Y$ называется графиком отображения $f : X \to Y$.

Композицией двух отображений $f : X \to Y$ и $g : \mathrm{dom}(g) \to Z$, где $\mathrm{dom}(g) \subset Y$, называется отображение $g \circ f$, определённое на $\mathrm{dom}(g \circ f) := \{x \in X : \ f(x) \in \mathrm{dom}(g)\}$ и действующее по правилу $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Отображение $f : X \to Y$ называется сюрьективным (отображением на множество Y), если $\mathrm{im}(f) = Y$.
Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным (взаимно однозначным), если $f(x_1) \neq f(x_2)$ для всех различных $x_1, x_2 \in X$, т. е. $x_1 \neq x_2$.
Одновременно сюрьективное и инъективное отображение называется биективным.
Для инъективного отображение $f : X \to Y$ определено отображение $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to X$, действующее следующим образом: элементу $y \in \mathrm{im}(f)$ сопоставляется такой элемент $x \in \mathrm{dom}(f)$, что $y = f(x)$, и называемое обратным к f.
Заметим, что
$f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in \mathrm{im}(f)$;
$f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Графики функций и их преобразования.
Функцию $f : X \to \mathbb{R}$, определенную на симметричном относительно нуля множестве $X \subset \mathbb{R}$, называют
чётной, если $f(-x) = f(x)$, $x \in X$;
нечётной, если $f(-x) = -f(x)$, $x \in X$.
График чётной функции симметричен относительно оси ординат, график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

В ряде случаев график функции g можно получить преобразованием известного графика другой функции f:
$g(x) = f(x) + c$ — сдвиг графика функции f вдоль оси ординат на c;
$g(x) = f(x - c)$ — сдвиг графика функции f вдоль оси абсцисс на c;
$g(x) = f(-x)$ — симметрия графика функции f относительно оси ординат;
$g(x) = -f(x)$ — симметрия графика функции f относительно оси абсцисс;
$g(x) = af(x)$ — умножение каждой ординаты графика функции f на a;
$g(x) = f(ax)$ — деление каждой абсциссы графика функции f на a.

Предел последовательности и функции.

$a_n \to a$ при $n \to \infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a) \iff$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n > n_0\ |a_n - a| < \varepsilon$

$f(x) \to a$ при $x \to +\infty$ $(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a) \iff$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta = \Delta(\varepsilon) > 0\ \forall x > \Delta\ |f(x) - a| < \varepsilon$

$f(x) \to a$ при $x \to x_0$ $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a) \iff$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall 0 < |x - x_0| < \delta\ |f(x) - a| < \varepsilon$

Производная функции.

Определение (производной)

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ — функция, заданная на интервале (a, b), и $x_0 \in (a, b)$ — фиксированная точка этого промежутка. Если существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то его называют производной функции f в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$ или $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Если $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке $x \in (a, b)$, то возникает функция $x \mapsto f'(x)$, которую также называют производной функции $f(x)$ (на промежутке (a, b)).

Физическая интерпретация производной.
Если x — время, а $f(x)$ — координата прямолинейно движущегося тела, то отношение $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ — это средняя скорость на промежутке $[x_0, x]$, а $f'(x_0)$ — мгновенная скорость в момент времени x_0.

Правила дифференцирования.

Теорема (о производной и алгебраических операциях)

Пусть $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *имеют производные в точке* $x_0 \in (a, b)$.

Тогда их сумма $f + g$, *произведение* fg *и частное* $\dfrac{f}{g}$ *тоже имеют производные в точке* x_0, *причем*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

(последнее при условии, что $g'(x_0) \neq 0$*).*

Теорема (о производной композиции)

Пусть $f : (a, b) \to (c, d)$ *имеет производную* $f'(x_0)$ *в точке* $x_0 \in (a, b)$, $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ *имеет производную* $g'(y_0)$ *в точке* $y_0 = f(x_0)$, *то композиция* $g \circ f$ *имеет производную в точке* x_0 *и* $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Теорема (о производной обратной функции)

Пусть $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *обратима и* $x_0\in(a,b)$. *Если* $f(x)$ *имеет ненулевую производную* $f'(x_0)\neq 0$ *и обртная функция* $f^{-1}(y)$ *непрерывна в точке* $y_0=f(x_0)$, *то* $f^{-1}(y)$ *имеет производную в точке* y_0, *причем*

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема (о производных элементарных функций)

$(a^x)' = a^x \ln a,\ x \in \mathbb{R};$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ x > 0;$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-},\ x > 0;$

$(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R};$

$(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R};$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ \ k \in \mathbb{Z};$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi\ \ k \in \mathbb{Z};$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1;$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1;$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R};$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.$

Логическая символика.

Основное содержание математики обычно организуется в вдиде отдельных высказываний (утверждений), выражающих те или иные факты.

Высказывание — это повествовательное выражение, о котором можно судить, истинно оно или ложно.

Из высказываний по правилам логики образуют составные высказывание, истинность которых по известным правилам определяется в зависимости от истинности составляющих утверждение высказываний.

Конъюкцией $P \wedge Q$ $(P\&Q)$ высказываний P и Q называется высказывание «P и Q», которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания P и Q одновременно.

Дизъюкцией $P \vee Q$ высказываний P и Q называется высказывание «P или Q», истинное в том и только в том случае, когда истинно хотя бы одно из высказываний P или Q.

Отрицанием $\neg P$ высказывания P называется высказывание «не P», которое истинно, если P ложно, и ложно, если P истинно.

Пусть P и Q — высказывания. Под импликацией (следованием) $P \to Q$ ($P \Rightarrow Q$) понимается высказывание «из P следует Q», которое ложно, если P истинно, а Q ложно, и истинно во всех остальных случаях.

Импликация $P \to Q$ может также оформляться одним из следующих равнозначных выражений:

«Q следует из P»,

«из P вытекает Q»;

«Q вытекает из P»,

«если выполнено P, то выполнено Q»;

«Q выполнено, если выполнено P»;

«для выполнения P необходимо выполненение Q»;

«для выполнения Q достаточно выполненение P»;

«P выполнено только в том случае, если выполнено Q»;

«Q выполнено в том случае, если выполнено P»;

«P выполнено только тогда, когда выполнено Q»;

«Q выполнено тогда, когда выполнено P».

Если из P следует Q и одновременно из Q следует P, то символически этот факт записывают в виде $P \leftrightarrow Q$ ($P \Leftrightarrow Q$, $P = Q$, $P \equiv Q$), называют высказыванием равносильности P и Q и употребляют для его словесного выражения одно из следующих равнозначных словосочетаний:
«P и Q равносильны»;
«для того чтобы было выполнено P, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено Q»;
«P выполнено тогда и только тогда, когда выполнено Q»;
«P выполнено в том и только в том случае, если выполнено Q».

Импликации «из P следует Q» и «из (не Q) следует (не P» равносильны. На этом основано доказательство от противного.

Для высказывания импликации «из P следует Q» импликация «из Q следует P» называется обратным высказыванием.
Истинность обратного высказывания никак не связан с истинностью исходного высказывания!!!
Также не надо путать обратное утверждение $Q \to P$ с отрицанием $\neg(P \to Q)$!!!

Высказывания с перемменными. Кванторы.

Переменная — это буква или символ, вместо которого можно подставлять различные конкретные объекты (значения) из определенного класса. Высказыванием с перемменными — будем называть повествовательное предложение, в которое входит одна или несколько переменных и которое при подстановке конкретных значений переменных превращается в высказывание с вполне определенной истинностью.

Предположим, что $P(x)$ — высказывание с переменной. Высказывание вида «для всех x из множества A верно $P(x)$» называют высказыванием (все)общности и символически записывают так: $\forall x \in A\ P(x)$.

Высказывание вида «существует x из множества A такой, что верно $P(x)$» называют высказыванием существования и символически записывают так: $\exists x \in A\ P(x)$.

Теорема и доказательство.

В простейшем случае можно считать, что теорема — это утверждение вида $A \to B$, которое остается если из длинной цепочки

$A \to A_1 \to \ldots \to A_i \to A_{i+1} \to \ldots \to A_n \to B$

вполне понятных переходов выбросить среднюю часть

$\to A_1 \to \ldots \to A_i \to A_{i+1} \to \ldots \to A_n \to$,

которая называется доказательством.

Некоторые теоремы имеют особые «звания», которые подчеркивают тот или иной характер теоремы.
Теорема вида $A \leftrightarrow B$ называется критерием (например, критерий Коши или критерий точной верхней границы).
Теорема вида $A \to B$, где A — интересный факт, а выполнение B легко проверяется, называется теоремой о необходимом условии (выполнения A) или просто необходимым условием. Если же теорема имеет вид $B \to A$, где A — интересный факт, а B легко проверяется, то теорема называется теоремой о достаточном условии или просто достаточным условием.
Понятно, что критерий можно иначе назвать теоремой о необходимом и достаточном условии.

Доказать теорему $A \to B$ значит восстановить часть цепочки $\to A_1 \to \ldots \to A_i \to A_{i+1} \to \ldots \to A_n \to$.
Доказывая переход $A_i \to A_{i+1}$ нужно четко осозновать, в чем состоят утверждения A_i и A_{i+1}, особенно если утверждения с кванторами.
В сложных случаях, когда кванторов много, мы постараемся подробно расписывать содержания A_i и A_{i+1}, предваряя первое словом дано, а второе — словом надо.

Метод доказательства от противного.

Мы знаем, что утверждения $A_i \to A_{i+1}$ и $\neg A_{i+1} \to \neg A_i$ равносильны.

Поэтому в доказательстве

$\to A_1 \to \ldots \to A_i \to A_{i+1} \to \ldots \to A_n \to$

может оказаться удобнее доказывать $\neg A_{i+1} \to \neg A_i$ вместо $A_i \to A_{i+1}$.

Тогда мы мысленно заменяем соответсвтующий переход в доказательстве

$\to A_1 \to \ldots \to A_i\{\neg A_{i+1} \to \neg A_i\}A_{i+1} \to \ldots \to A_n \to$,

предваряя словами доказжем $A_i \to A_{i+1}$ методом от противного.

$$\neg(\neg A) = A;$$
$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B;$$
$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B;$$
$$\neg(\forall x \in A\ P(x)) = \exists x \in A\ \neg P(x);$$
$$\neg(\exists x \in A\ P(x)) = \forall x \in A\ \neg P(x);$$
$$\neg(\forall x \in A\ (P(x) \to Q(x)) = \exists x \in A\ (P(x) \vee \neg Q(x));$$
$$\neg(\exists x \in A\ (P(x) \to Q(x))) = \forall x \in A\ (P(x) \vee \neg Q(x)).$$

Метод математической индукции.

Теорема (метод математической индукции)

Пусть $P(n)$ *— утверждение, зависящее от переменного, пробегающего целые значения* $n \in \mathbb{Z}$ *и* $n_0 \in \mathbb{Z}$ *— фиксированное целое число. Тогда из выполнения условий*
(1) $P(n_0)$ *(базис индукции),*
(2) $\forall n \in \mathbb{Z}\ ((n \geq n_0) \to (P(n) \to P(n+1)))$ *(индукционной шаг)*
следует, что утверждение $P(n)$ *выполняется для любого целого числа* $n \geq n_0$.

Без доказательства.

Факториал:
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ — произведение всех натуральных чисел, не превосходящих $n \in \mathbb{N}$.
$0! = 1$.
Двойной факториал:
$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)$ — произведение всех четных натуральных чисел, не превосходящих $2n$, $n \in \mathbb{N}$;
$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ — произведение всех нечетных натуральных чисел, не превосходящих $2n-1$, $n \in \mathbb{N}$.
Пусть $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$.
Число перестановок n **элементов:** $P_n := n!$.
Число размещений n **элементов по** k **упорядоченным местам:** $A_n^k := \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
Число сочетаний n **элементов в неупорядоченные наборы из** k **элементов (биномиальный коэффициент):**
$C_n^k := \dfrac{n!}{K!(n-k)!}$.

Лемма (Паскаля)

$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = 1$ для $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.
$C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$ для $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$.

Лемма (формула бинома Ньютона)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \text{ для } a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Лемма (неравенство Бернулли)

$(1+x)^n \geq 1 + nx$ для $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$.