Гл. 5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

§ 5.1. Метрические и нормированные пространства.

5.1.1. Определение арифметического пространства R^n и евклидова расстояния в нем.

Определение 5.1 (вещественного n-мерного арифметического пространства R^n)

Рассмотрим прямое произведение n экземпляров множества R: $R^n = R \times \ldots \times R = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$, т. е. R^n состоит из упорядоченных наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ вещественных чисел x_i, $i = 1, \ldots, n$. Введём на R^n операции сложение элементов и умножение на скаляр согласно следующим правилам для $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Тогда введённые операции обладают всеми свойствами, предъявляемыми к операциям в векторном пространстве, стало быть, R^n — векторное пространство, элементы которого обычно называют векторами. При этом о пространстве R^n говорят как об вещественном n-мерном арифметическом пространстве.

Определение 5.2 (стандартного скалярного произведения на R^n)

Для векторов $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ определим операцию стандартного скалярного произведения (x, y) правилом

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Определение 5.3 (евклидовой длины (нормы) в R^n)

Для вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ его евклидова длина (норма) $|x|$ определяется правилом

$$|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}.$$

Замечание 5.4

В дальнейшем для стандартного скалярного произведения будут иногда также использоваться следующие обозначения:

$$(x, y) = \langle x, y \rangle = x \cdot y, \quad |x| = |x|_2 = \|x\|_2.$$

Лемма 5.5 (о согласованности евклидовой длины (нормы) со стандартным скалярным произведением)

Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ *справедливо*

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Замечание 5.6 (о конечномерном евклидовом векторном пространстве)

О конечномерном векторном пространстве, рассматриваемом вместе со скалярным произведением (x, y) и согласованной с этим скалярным произведением нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$, говорят как о евклидовом векторном пространстве. Поэтому пространство $\mathbb{R}^n$, рассматриваемое со стандартным скалярным произведением и евклидовой нормой, является евклидовым векторным пространством.

5.1.2. Определение метрики и нормы.

Определение 5.7 (метрики и метрического пространства)

Пусть X — произвольное множество. Функцию $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называют **метрикой** на X, если для любых $x, y, z \in X$ выполнены следующие условия:

1) $d(x, y) \geq 0$ и $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (**положительная определенность**);

2) $d(x, y) = d(y, x)$ (**симметричность**);

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (**неравенство треугольника**).

Множество с заданной на нем метрикой называют **метрическим пространством**.

Замечание 5.8

Обратим внимание, что множество X в определении метрического пространства никакой векторной структурой может не обладать. Использование слова «пространство» в термине «метрическое пространство» это просто устойчивое словосочетание в математике.

Пример 5.9 (расстояние на клетчатой бумаге)

Возьмем лист клетчатой бумаги, и пусть множество X состоит из всех точек пересечения линий. В качестве расстояния между точками можно принять наименьшее количество отрезков между вершинами по горизонтали и по вертикали, по которым надо пройти для попадания из одной точки в другую. Обратим внимание на то, что здесь никакой векторной структуры нет — мы не может складывать перекрестки или умножать их на число.

Пример 5.10 (рукопожатия)

Определим расстояние между любыми двумя людьми, полагая его равным числу рукопожатий, которые их связывают, т. е. количеству знакомых между ними. Расстояние от данного человека до него самого равно нулю. Расстояние от данного человека до его знакомого равно единице. Если его знакомый знает кого-то, которого не знает данный человек, то расстояние равно двум, и т. д. Нетрудно понять, что так введенная для пар людей функция обладает всеми свойствами метрики.

Упражнение 5.11

Проверить, что расстояния из примеров 5.9 и 5.10 удовлетворяют определению 5.7.

Когда есть структура векторного пространства, необязательно определять расстояние между двумя произвольными элементами, как это сделано в метрическом пространстве. Достаточно определить расстояние от каждой точки векторного пространства до нуля и положить, как мы это делали для евклидова расстояния, расстояние от x до y равным расстоянию от начала координат до точки $y - x$.

Определение 5.12 (нормы и нормированного пространства)

Пусть X — векторное пространство. Функцию $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, называют нормой, если для любых $x, y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены условия:
1) $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ (положительная определенность);
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (положительная однородность);
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).
Векторное пространство с заданной на нем нормой называют нормированным пространством.

Замечание 5.13

Термин «нормированное пространство» в отличии от термина «метрическот пространство» всегда используется только для векторных пространств.

Норма всегда порождает метрику.

Определение 5.14 (метрики, согласованной (порожденной) нормой)

Для нормированного пространства X функция, определяемая правилом $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$, называется **метрикой, согласованной (порожденной) нормой**.

Замечание 5.15

Не всякая метрика порождается нормой.

Определение 5.16 (основных норм и метрик в $\mathbb{R}^n$)

1. Для $1 \le p < \infty$ и $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ определим норму и согласованную с ней метрику (расстояние) следующим образом

$$|x|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

$$d_p(x, y) := |y - x|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^p \right)^{1/p}.$$

2. В случае $p = 2$ получаем евклидовы норму и расстояние

$$|x|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad d_2(x, y) := |y - x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2}.$$

3. В случае $p = 1$ получаем

$$|x|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$d_1(x, y) := |y - x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|.$$

4. В случае $p = \infty$ определим норму и согласованную с ней метрику (расстояние) следующим образом

$$|x|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|,$$

$$d_\infty(x, y) := |y - x|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |y_i - x_i|.$$

Пример 5.17 (равномерная норма)

В пространстве непрерывных функций $C((a, b))$ мы определяли равномерную норму правилом

$$\|f\|_{C((a,b))} := \sup_{t \in (a,b)} |f(t)|.$$

Упражнение 5.18

1. Проверить выполнение определения нормы для основных норм в $\mathbb{R}^n$ (определение 5.16) и для равномерной нормы в $C((a, b))$.
2. Доказать, что для $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено $|x|_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} |x|_p$.

Теорема 5.19 (о сравнениии основных норм в $\mathbb{R}^n$)

Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ *верны неравенства*

$$|x|_\infty \le |x|_2 \le |x|_1, \quad \frac{1}{\sqrt{n}}|x|_1 \le |x|_2 \le \sqrt{n}|x|_\infty.$$

Определение 5.20 (открытого и замкнутого шара)

В номированном пространстве X для $x \in X$ и $r > 0$ множество $B(x,r) := \{y \in X : \ \|y - x\| < r\}$ называется открытым шаром с центром в точке x и радиуса r, а множество $\overline{B}(x,r) := \{y \in X : \ \|y - x\| \leq r\}$ называется замкнутым шаром с центром в точке x и радиуса r.

Определение 5.21 (сферы)

В номированном пространстве X для $x \in X$ и $r > 0$ множество $S(x,r) := \{y \in X : \ \|y - x\| = r\}$ называется сферой с центром в точке x и радиуса r,

Замечание 5.22

1. В определении 5.20 словосочетания «открытый шар» и «замкнутый шар» надо воспринимать как целостные, т. е. нет просто шара, есть открытый шар и замкнутый шар. Если говорят «шар», то подразумевают открытый шар.
2. Определение замкнутого шара отличается от открытого только тем, что он включает в себя ограничивающую его сферу.

Пример 5.23 (шары основных норм в $\mathbb{R}^2$)

Шары на плоскости $\mathbb{R}^2$ называются кругами:

$$B_2(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x|_2 < r\} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ (x_1)^2 + (x_2)^2 < r^2\},$$

$$B_1(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x|_1 < r\} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1| + |x_2| < r\},$$

$$B_\infty(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x|_\infty < r\} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \max\{|x_1|,|x_2|\} < r\}.$$

Замечание 5.24

Как видно, не все шары круглые, но тем не менее они называются шарами.

Замечание 5.25 (о геометрическом смысле неравенств)

Изобразим единичные шары в разных нормах на одной плоскости. Видно, что они вкладываются друг в друга: $B_1(0,1) \subset B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1)$. Такое расположение шаров иллюстрирует неравенство $|x|_\infty \leq |x|_2 \leq |x|_1$, доказанное в теореме 5.19 о сравнении основных норм в $\mathbb{R}^n$. В этом можно убедиться следующим образом. Пусть $x = (x_1, x_2)$ — некоторая точка плоскости. Как измеряется расстояние от начала координат до этой точки? Проводится луч, идущий из начала через данную точку, на этом луче берется некоторый отрезок в качестве единичного и с использованием этого масштаба проводится измерение. Изобразим на плоскости единичные сферы, т. е. контуры, ограничивающие шары в разных нормах, и заметим, что относительно соответствующей нормы единичным окажется отрезок от начала координат до точки пересечения луча со сферой. Ясно, что чем короче отрезок, тем больше соответствующая норма данного элемента x.

Самый короткий отрезок будет относительно нормы $|\cdot|_1$, затем идет отрезок по евклидовой норме $|\cdot|_2$ и завершает отрезок относительно нормы $|\cdot|_\infty$. Кстати, видно, что относительно евклидовой нормы $|\cdot|_2$ масштаб, т. е. единичный относительно нормы отрезок, во всех направлениях один и тот же, а для других норм он меняется в зависимости от расположения данной точки на плоскости.

Чему соответствует на плоскости второе неравенство из теоремы 5.19 о сравнениии основных норм в $\mathbb{R}^n$? Для двух переменных ($n = 2$) оно выглядит так: $\frac{1}{2}|x|_1 \leq |x|_2 \leq 2|x|_\infty$.

Это неравенство соответствует вложению шаров $B_\infty(0, 1/\sqrt{2}) \subset B_2(0,1) \subset B_1(0, \sqrt{2})$.

Отметим важное наблюдение. Если есть две нормы в $\mathbb{R}^n$, то, сжимая или растягивая шары каждой из этих норм, можно добиться того, что один из них, взятый с некоторым коэффициентом, окажется внутри второго и, в свою очередь, второй, также взятый с некоторым коэффициентом, окажется в первом.

Определяющие свойства нормы имеют следующий геометрический смысл. Свойство 1) означает, что по любому направлению отрезок от начала координат до пересечения с единичной сферой не сводится к точке и ограничен. Свойство 2) геометрически означает симметрию шара относительно нуля. Свойство 3) означает, что шар должен быть множеством выпуклым, т. е. для любых двух точек шара весь отрезок с концами в этих точках должен содержаться в шаре. Например, если взять на роль нормы выражение

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

с $p < 1$, то единичный шар в таком случае не является выпуклым множеством, стало быть, для таких p не выполнено неравенство треугольника и указанное выражение нормой не будет.

Теорема 5.26 (об эквивалентности норм в $\mathbb{R}^n$)

В пространстве $\mathbb{R}^n$ *любые две нормы эквивалентны, т. е. для любых двух норм* $\|\cdot\|_a$ *и* $\|\cdot\|_b$ *существуют константы* $C_1, C_2 > 0$ *такие, что для любого* $x \in \mathbb{R}^n$ *выполнены неравенства*

$$C_1\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C_2\|x\|_a.$$

Без доказательства.

Замечание 5.27

Доказанная ранее теорема 5.19 о сравнениии основных норм в $\mathbb{R}^n$ устанавливает их эквивалентность. Поэтому теорема 5.26 для основных норм в $\mathbb{R}^n$ доказана.

Упражнение 5.28

Доказать теорему 5.26 для произвольных норм в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5.29 (о классических неравенствах)

Для любых $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)\mathbb{R}^n$ *имеет место*

1) $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i)^2\right)^{1/2}$ *или, иначе,*
$|(x, y)| \leq |x|_2 |y|_2$ *(неравенство Коши — Буняковского);*
2) $|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$, $p \geq 1$ *(неравенство Минковского).*

Упражнение 5.30

Доказать п. 2) теоремы 5.29 для случая $p \neq 2$.

5.1.3. Взаимное расположение точки и множества.

Определение 5.31 (внутренней, внешней, граничной и предельной точек)

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — множество и $a \in \mathbb{R}^n$ — точка.
1) Точку a называют внутренней точкой множества X, если существует такое $r > 0$, что $B_2(a, r) \subset X$. Множество всех внутренних точек множества X называют внутренностью множества X и обозначают через $\operatorname{int} X$.
2) Говорят, что точка a — внешняя точка множества X, если существует такое $r > 0$, что $B_2(a, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus X$ или, иными словами, если a — внутренняя точка дополнения множества X до $\mathbb{R}^n$. Множество всех внешних точек множества X называют внешностью множества X и обозначают через $\operatorname{ext} X$.

3) Точку a называют граничной точкой множества X, если в любом шаре с центром в этой точке есть как точки множества X, так и точки его дополнения, т. е. для любого $r > 0$ выполнено $B(a,r) \cap X \neq \emptyset$ и $B(a,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$. Множество всех граничных точек множества X называют границей множества X и обозначают через ∂X или $\operatorname{fr} X$.
4) Точку a называют предельной точкой множества X, если в любом шаре с центром в этой точке есть точка множества X, отличная от точки a, т. е. для любого $r > 0$ выполнено $(B(a,r) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset$. Множество всех предельных точек множества X обозначают через $\operatorname{Lim} X$. Объединение множества X и множества $\operatorname{Lim} X$ его предельных точек называют замыканием множества X и обозначают через $\operatorname{cl} X$ или $\overline{X}$, т. е. $\operatorname{cl} X = \overline{X} = X \cup \operatorname{Lim} X$.

Замечание 5.32

Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ всё $\mathbb{R}^n$ распадается на три множества: внутренность $\operatorname{int} X$, внешность $\operatorname{ext} X$ и границу ∂X, причем эти множества попарно не пересекаются.
Сформируем образное представление о внутренних, граничных и внешних точках множества. Изобразим какое-нибудь множество X на плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящее из всех точек плоскости, охваченных контуром, включая сам контур. Точка a, лежащая внутри контура, является внутренней точкой множества X, ибо есть шар с центром в этой точке, состоящий только из точек множества X. Ясно, что эта точка не граничная и не внешняя, так как в таком шаре нет точек дополнения множества X. Кстати, эта точка предельная, поскольку в любом шаре с центром в этой точке есть хотя бы одна точка множества X, отличная от точки a.

Далее, точка b, лежащая на на контуре, является граничной ввиду того, что какой бы шар с центром в этой точке мы ни взяли, в нем есть как точки самого множества, так и точки дополнения. Такая точка, как и a, является предельной точкой множества X, но она не может быть ни внутренней, ни внешней, поскольку любой шар с центром в этой точке включает как точки из множества X, так и точки из его дополнения. Наконец, точка c, лежащая вне контура, является внешней: есть шар с центром в этой точке, полностью расположенный в дополнении множества X. Ясно, что она не может быть ни предельной для множества X, ни внутренней, ни граничной.

Пример 5.33

1) Найдем внутренность, внешность и границу открытого шара $B_2(0,r)$. Ясно, что каждая точка этого шара является его внутренней точкой. Действительно, взяв точку $x \in B_2(0,r)$, находящуюся на расстоянии $d < r$ от начала координат, можно найти шар с центром в этой точке, целиком лежащий в $B_2(0,r)$. Например, можно взять любой шар радиуса, меньшего чем $r-d$. Тем самым $\operatorname{int} B_2(0,r) = B_2(0,r)$. Внешность этого шара состоит из всех точек x, находящихся на расстоянии $D > r$ от нуля. Ясно, что шар с центром в x и любым радиусом, меньшим чем $D-r$, свободен от точек исходного шара. Тем самым $\operatorname{ext} B_2(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x|_2 > r\} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_2}(0,r)$. Точки на сфере $S_2(0,r) = \{x \in R^n : \ |x|_2 = r\}$ не могут быть ни внутренними, ни внешними. Они образуют границу шара: $\partial B_2(0,r) = S_2(0,r)$.

Опишем замыкание $\operatorname{cl} B_2(0, r)$. Ясно, что точки самого множества всегда входят в его замыкание. Для получения замыкания к точкам множества надо добавить его предельные точки, не принадлежащие самому множеству. В нашем случае к шару надо добавить сферу как множество всех не принадлежащих открытому шару его предельных точек и в объединении получится, с одной стороны, замыкание открытого шара, а с другой — замкнутый шар. Тем самым замыкание открытого шара есть соответствующий ему замкнутый шар: $\operatorname{cl} B_2(0, r) = \overline{B}_2(0, r)$.

2) Найдем внутренность, внешность и границу замкнутого шара $\overline{B}_2(0,r)$ Этот шар отличается от открытого шара только сферой $S_2(0,r)$. У него внешность, внутренность и граница такие же, как и у открытого шара: $\operatorname{int}\overline{B}_2(0,r) = B_2(0,r)$, $\operatorname{ext}\overline{B}_2(0,r) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_2(0,r)$, $\partial\overline{B}_2(0,r) = S_2(0,r)$, $\operatorname{cl}\overline{B}_2(0,r) = \overline{B}_2(0,r)$. Отличие открытого шара от замкнутого только в том, что открытый шар совпадал со своей внутренностью, а замкнутый совпадает со своим замыканием.

3) Найдем внутренность, внешность и границу сферы $S_2(0, r)$. Начнем с точек сферы. Можно ли точку из сферы окружить шаром с центром в этой точке, целиком состоящим из точек сферы? Ясно, что нельзя: в любом таком шаре есть как точки с $|x|_2 < r$, так и с $|x|_2 > r$, стало быть, никакая точка сферы не является ее внутренней точкой и ее внутренность пустая: $\operatorname{int} S_2(0, r) = \emptyset$. Дополнение сферы состоит из внешних точек: $\operatorname{ext} S_2(0, r) = \mathbb{R}^n \setminus S_2(0, r)$. Наконец, каждая точка сферы является ее граничной точкой, ибо в любом шаре с центром в такой точке есть точки как сферы, так и ее дополнения, стало быть, $\partial S_2(0, r) = S_2(0, r)$. Таким образом, сфера состоит только из граничных точек. Ее замыкание совпадает со сферой: $\operatorname{cl} S_2(0, r) = S_2(0, r)$.

4) Найдем внутренность, внешность и границу всего $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что $\operatorname{int} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, $\operatorname{ext} \mathbb{R}^n = \emptyset$, $\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$, $\operatorname{cl} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

5) Найдем внутренность, внешность и границу множества $\mathbb{Q}^n$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, т. е. множества упорядоченных наборов из n рациональных чисел. Таких точек довольно много, ибо, как известно, в любом открытом промежутке числовой прямой есть рациональное число. Тем не менее внутренность этого множества пустая: $\operatorname{int}\mathbb{Q}^n = \emptyset$. Это связано с тем, что в любом открытом промежутке числовой прямой есть не только рациональное, но и иррациональное число, так что в любом шаре с центром в точке с рациональными координатами есть точка, хотя бы одна координата которой иррациональна. Ясно, что и внешность его пустая: $\operatorname{ext}\mathbb{Q}^n = \emptyset$. Стало быть, любая точка из $\mathbb{R}^n$ является его граничной точкой, так что $\partial\mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n$ и $\operatorname{cl}\mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n$.

Определение 5.34 (открытого и замкнутого множеств)

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называют **открытым**, если все его точки внутренние, т. е. если оно совпадает со своей внутренностью: $X = \operatorname{int} X$.

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называют **замкнутым**, если оно совпадает со своим замыканием: $X = \operatorname{cl} X$.

Упражнение 5.35

Доказать, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus X$ открыто. В топологии обычно последнее свойство берут за определение замкнутых множеств.

Пример 5.36

1) Открытый шар $B_2(0, r)$ является открытым множеством, ибо он совпадает со своей внутренностью.
2) Замкнутый шар $\overline{B}_2(0, r)$ является замкнутым множеством, так как он совпадает со своим замыканием.
3) Сфера $S_2(0, r)$ является замкнутым множеством, поскольку она совпадает со своим замыканием.
4) $\mathbb{R}^n$ замкнуто и открыто одновременно.
5) $\mathbb{Q}^n$ не открыто и не замкнуто.

Определение 5.37 (ограниченного множества)

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называют ограниченным, если X содержится в некотором шаре.

Определение 5.38 (компактного множества)

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называют компактным (или компактом), если оно замкнуто и ограничено.

Замечание 5.39

Понятие компактного множества есть в любом нормированном пространстве, но там оно определяется иначе. Данное здесь определение компакта корректно только для конечномерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 5.40 (связного множества и области)

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называют **связным**, если для любых двух его точек есть непрерывная кривая, соединяющая эти точки и полностью лежащая в X. Открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$ называют **областью**.

Пример 5.41

Шар $B_2(0, r)$, очевидно, множество ограниченное, но не компактное, поскольку не замкнутое. Оно связно, так как любые две его точки можно соединить гладкой кривой, например отрезком. Замкнутый шар $\overline{B}(0, r)$ есть множество ограниченное и замкнутое, стало быть, компактно. Это связное множество. Сфера $S_2(0, r)$ — множество ограниченное, замкнутое, так что компактное, и связное. Ясно, что открытый шар — это область, тогда как замкнутый шар и сфера областями не являются.

5.1.4. Предел и непрерывность отображений арифметических конечномерных пространств.

Определение 5.42 (сходимости в $\mathbb{R}^n$)

Говорят, что последовательность векторов $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, сходится к вектору $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ при $k \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k > k_0\ |x^{(k)} - a|_2 < \varepsilon$, при этом пишут $x^{(k)} \to a$ при $k \to \infty$ или $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = a$.

Замечание 5.43

Нетрудно заметить, что это определение практически совпадает с определением предела числовой последовательности с тем только отличием, что здесь вместо модуля разности чисел берется евклидова норма разности векторов. Впрочем, ввиду эквивалентности норм вместо евклидовой нормы можно взять любую другую.

Лемма 5.44

Сходимость в $\mathbb{R}^n$ *является покомпонентной сходимостью, т. е. последовательность* $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ *сходится к вектору* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *при* $k \to \infty$ *тогда и только тогда, когда каждая из компонент последовательности векторов сходится к соответствующей компоненте предельного вектора, т. е.* $x_i^{(k)} \to a_i$ *при* $k \to \infty$ *для каждого* $i = 1, \ldots, n$.

Определение 5.45 (предела отображения)

Пусть $f : X \to \mathbb{R}^m$ — отображение, определенное на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, и a — предельная точка множества X. Вектор $b = (b_1, \ldots, b_m)$ называют **пределом отображения f в точке a** и пишут $f(x) \to b$ при $x \to a$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (0 < |x - a|_2 < \delta \Rightarrow |f(x) - b|_2 < \varepsilon)$.

Замечание 5.46

Характеризующее предел высказывание по виду ничем не отличается от соответствующего высказывания для функции одной переменной, различие только в том, что здесь взаимная удаленность точек измеряется их нормой.

Замечание 5.47 (о сходимости координатных функций)

Ввиду эквивалентности норм в конечномерном арифметическом пространстве сходимость отображения, действующего в $\mathbb{R}^m$, равносильна сходимости всех его координатных функций. Точнее, если $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, m \ \lim\limits_{x \to a} f_j(x) = b_j$.

Определение 5.48 (непрерывности отображения)

Пусть $f : X \to \mathbb{R}^m$ — отображение, определенное на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, и $a \in X$. Говорят, что отображение f непрерывно в точке a, если
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X(|x - a|_2 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)|_2 < \varepsilon$.
Говорят, что отображение f непрерывно на множестве X, если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

Замечание 5.49

Как и в случае предела, непрерывность отображения в точке равносильна непрерывности в этой точке всех его координатных функций.

Понятия связного и компактного множества обобщают на много-мерный случай понятия промежутка и отрезка. Для функций одной переменной были теоремы, посвященные свойствам функций на соответствующих множествах. Они переносятся на многомерный случай с необходимыми изменениями в условиях.

Замечание 5.50 (о теореме о промежуточных значениях)

В условиях теоремы о промежуточных значениях предполагалось, что функция задана на промежутке. Эта теорема доказывалась путем деления отрезка пополам и важно, что средняя точка любого отрезка с концами в данном промежутке попадет в исходное множество. Тем самым было важно, что любые две точки данного множества можно соединить лежащей в этом множестве линией, в одномерном случае отрезком. При переносе теоремы на многомерный случай надо предполагать, что область определения связна.

Замечание 5.51 (о теореме Вейерштрасса)

В доказательстве этой теоремы мы пользовались тем, что область задания функции являлась замкнутым ограниченным промежутком. Вспомним детали доказательства. Мы строили последовательность точек промежутка и из нее выбирали подпоследовательность, сходящуюся непременно к элементу этого же множества. Гарантией такой возможности были ограниченность промежутка и его замкнутость. Эти свойства вместе в многомерном случае называют компактностью. Стало быть, при обобщении теоремы Вейерштрасса на многомерный случай надо предполагать компактность области определения.

Таким образом, теоремы о свойствах непрерывных функций в одномерном случае переносятся на многомерный, при этом в тех теоремах, где важны промежуточные значения, надо предполагать связность, а там, где важны замкнутость и ограниченность, — предполагать компактность.

§ 5.2. Линейные отображения.

5.2.1. Определение линейного отображения.

Определение 5.52 (линейного отображения)

Пусть X и Y — вещественные векторные пространства.
Отображение $L : X \to Y$ называют линейным отображением, если

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v), \quad u, v \in X, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Значение отображения L на элементе x будем обозначать через $L(x)$ или, короче, Lx.
Если $Y = \mathbb{R}$, то линейное отображение называют линейным функционалом.

Пример 5.53 ($m \times n$-матрица)

Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

определяет линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ по правилу

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

или, в координатах, $y_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$, или в терминах отображений $y = Ax$. Легко проверить, что определяемое матрицей A отображение линейно.

Пример 5.54

В том случае, когда $m = 1$, умножение на матрицу $A = a = (a_1, \dots, a_n)$ можно представить как скалярное произведение $y = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = (a, x)$ Тем самым скалярное умножение на фиксированный вектор $a \in \mathbb{R}^n$ — это линейный функционал на $\mathbb{R}^n$.