

1. Геометрия комплексных чисел

В первой главе комплексные числа изучались с алгебраической точки зрения. Мы рассмотрели основные алгебраические операции и свойства комплексных чисел.

Но комплексные числа имеют и геометрическую интерпретацию как точки на плоскости или двумерные векторы. Действительно, каждое комплексное число z определяется парой вещественных чисел (x, y) : $z = x + iy$.

1.1. Комплексная плоскость

Рассмотрим плоскость и прямоугольную систему координат на ней. Ось абсцисс (ось Ox) обозначим $\operatorname{Re} z$, а ось ординат (ось Oy) обозначим $\operatorname{Im} z$ (см. рис 1). Каждому комплексному числу $z = x + iy$ сопоставим точку на этой плоскости с координатами (x, y) , и, другими словами, радиус-вектор с координатами (x, y) .

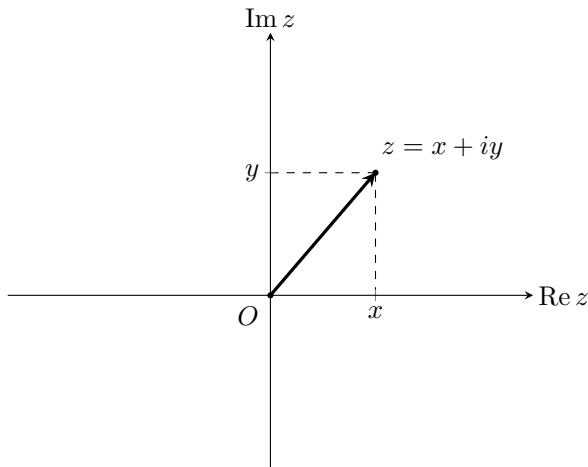


Рис. 1. Комплексная плоскость z

Заметим, что каждому комплексному числу соответствует толь-

ко одна точка плоскости, и, наоборот, каждой точке на плоскости соответствует только одно комплексное число.

Длина вектора с координатами (x, y) равна $\sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом, модуль комплексного числа $z = x + iy$ равен длине вектора, который соответствует данному числу на комплексной плоскости (см. равенство (??)). Часто модуль обозначают $|z| = \rho$. Несложно проверить, что расстояние между двумя точками комплексной плоскости z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$. Таким образом, модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками на комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называется угол φ между вектором (x, y) и положительным направлением действительной оси $\operatorname{Re} z$ измеряемый против хода часовой стрелки (рис. 2).

Аргумент числа z обозначается $\operatorname{Arg} z$.

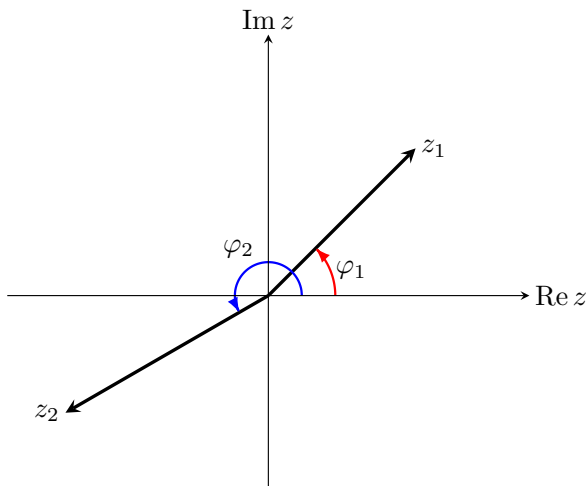


Рис. 2. Аргумент комплексного числа: $\operatorname{Arg} z_1 = \varphi_1$, $\operatorname{Arg} z_2 = \varphi_2$

Строго говоря, аргумент комплексного числа определен не од-

однозначно, в общем виде аргумент можно записать как

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z},$$

где $0 \leq \arg z < 2\pi$ — **главное значение** аргумента. В свою очередь, главное значение аргумента комплексного числа определено однозначно (и принимает значения в промежутке $[0, 2\pi)$).

Единственное комплексное число, для которого значение аргумента не определяют, это $z = 0$. Впрочем, это также единственное число, у которого модуль равен нулю, поэтому неопределённость аргумента в данном случае не является проблемой. Также можно отметить: для действительных чисел ($\operatorname{Im} z = 0$) $\arg z = 0$, если число положительное, и $\arg z = \pi$, если число отрицательное.

Геометрически сложение чисел z_1 и z_2 производится по правилу сложения векторов (по правилу параллелограмма). Разность $z_1 - z_2$ представляется вектором, конец которого находится в точке z_1 , а начало — в точке z_2 (см. рис. 3).

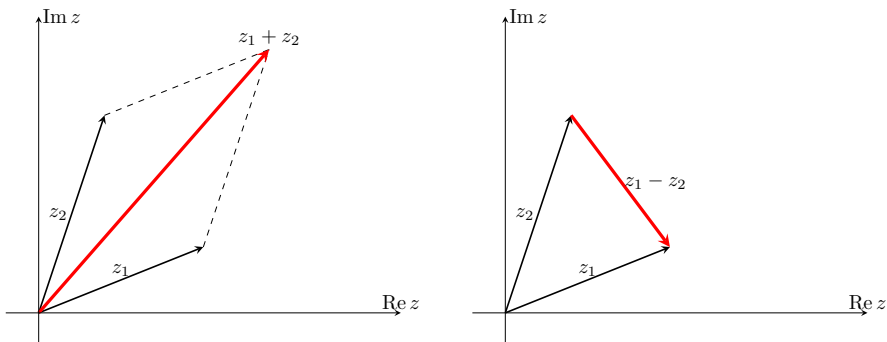


Рис. 3. Геометрическое представление суммы и разности

Геометрический смысл умножения на мнимую единицу i состоит в повороте на угол $\pi/2$ (или 90°). Действительно, пусть $z = x + iy$, тогда $i \cdot z = -y + ix$. Преобразование $(x, y) \mapsto (-y, x)$ — это поворот вектора (x, y) на $\pi/2$ против часовой стрелки.

Умножение комплексного числа $z = x + iy$ на комплексную экспоненту $e^{i\theta}$ соответствует повороту на угол θ против часовой стрелки (см. подробней пункты 1.2.1. и 1.3.1.).

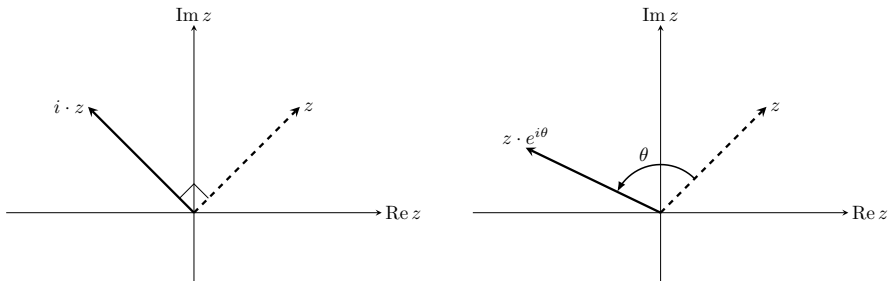


Рис. 4. Геометрический смысл умножения на i и на $e^{i\theta}$

Геометрический смысл операции сопряжения $z \mapsto \bar{z}$ состоит в отражении относительно оси Ox .

Пример 1. Исходя из геометрических рассуждений, доказать неравенство

$$\left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq \arg z.$$

Решение. Число $\frac{z}{|z|}$ находится на единичной окружности.

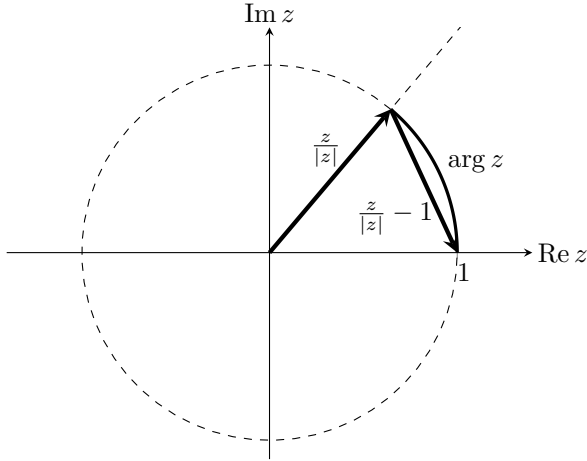


Рис. 5. Длина дуги больше длины отрезка.

Построим на комплексной плоскости вектор, соответствующий разности $\frac{z}{|z|} - 1$ (рис. 5).

Длина дуги единичной окружности, соединяющей точки 1 и $\frac{z}{|z|}$, равна $\arg z$ и не может быть меньше длины отрезка соединяющего эти точки. $\triangle$

Пример 2. Зафиксируем $z_0 \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z , которые удовлетворяют условиям:

$$1) |z - z_0| = r, \quad 2) |z - z_0| \leq r.$$

Решение. 1) Пусть $z = x + iy$ и $z_0 = x_0 + iy_0$. Распишем модуль комплексного числа $|z - z_0|$ по определению:

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |x + iy - (x_0 + iy_0)| = \\ &= |x - x_0 + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

Тогда равенство $|z - z_0| = r$ равносильно

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \quad \text{или} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

В свою очередь, уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ задаёт окружность с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом r .

2) Рассуждая аналогичным образом, приходим к выводу, что неравенство $|z - z_0| \leq r$ равносильно неравенству $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$, которое задаёт круг.

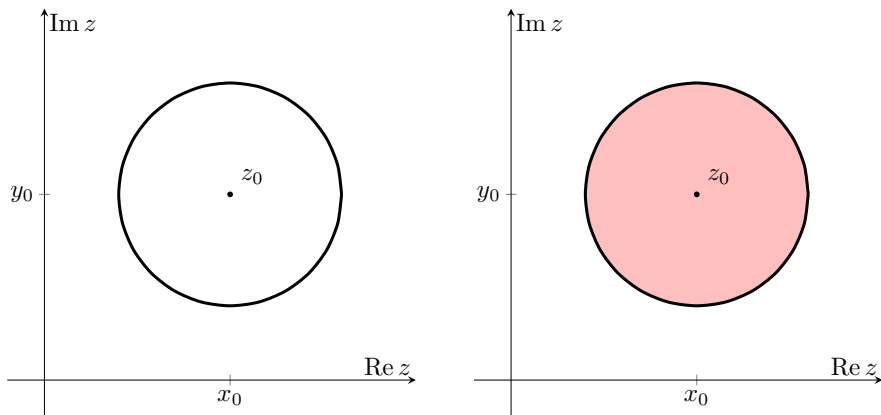


Рис. 6. Окружность и круг с центром в точке z_0 .

Таким образом уравнения $|z - z_0| = r$ и $|z - z_0| \leq r$ определяют на комплексной плоскости окружность и круг с центром в точке z_0 и радиусом r (рис. 6).

△

Пример 3. *Выяснить геометрический смысл указанных соотношений:*

$$\text{а) } |z| = \operatorname{Re} z + 1, \quad \text{б) } |z| = \operatorname{Im} z + 1.$$

Решение. а) Пусть $z = x + iy$, тогда первое соотношение можно переписать как

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1. \quad (1)$$

Отметим, что модуль комплексного числа $|z|$ всегда больше или равен нулю. Поэтому $x \geq -1$ (или $\operatorname{Re} z \geq -1$).

Возведём обе части уравнения (1) в квадрат и приведём подобные:

$$y^2 = 2x + 1. \quad (2)$$

Уравнение (2) задаёт параболу с вершиной в точке $(-\frac{1}{2}, 0)$.

б) Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что второе соотношение эквивалентно уравнению

$$x^2 = 2y + 1,$$

которое задаёт параболу с вершиной в точке $(0, -\frac{1}{2})$ (см. рис. 7).

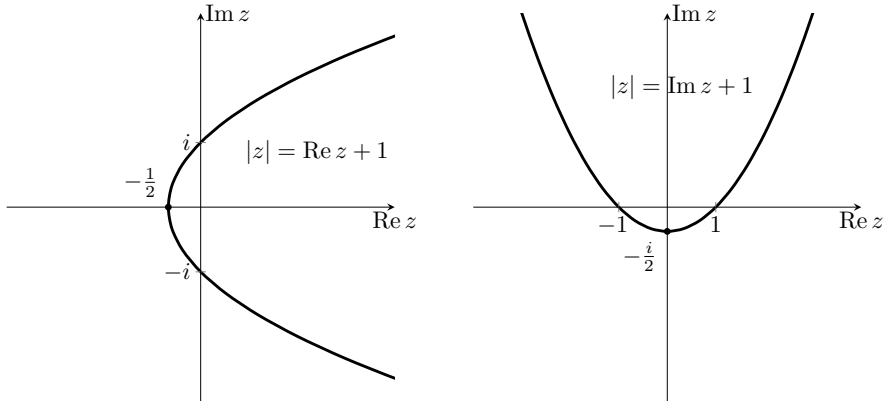


Рис. 7. Параболы

△

Пример 4. Изобразить множество точек на комплексной плоскости, соответствующих числам, которые удовлетворяют условию

$$|z - 1| + |z + 1| = 3. \quad (3)$$

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда (3) равносильно

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 3.$$

Перенесём второе слагаемое вправо и возведём обе части равенства в квадрат:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 9 - 6\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + (x + 1)^2 + y^2,$$

или, сокращая,

$$6\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 9 + 4x. \quad (4)$$

Возведём обе части равенства (4) в квадрат:

$$36(x^2 + 2x + 1 + y^2) = 81 + 2 \cdot 36x + 16x^2,$$

и далее

$$20x^2 + 36y^2 = 45. \quad (5)$$

Перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } a^2 = \frac{9}{4}, \quad b^2 = \frac{5}{4}.$$

Таким образом, исходное уравнение (3) равносильно каноническому уравнению эллипса (рис. 8).

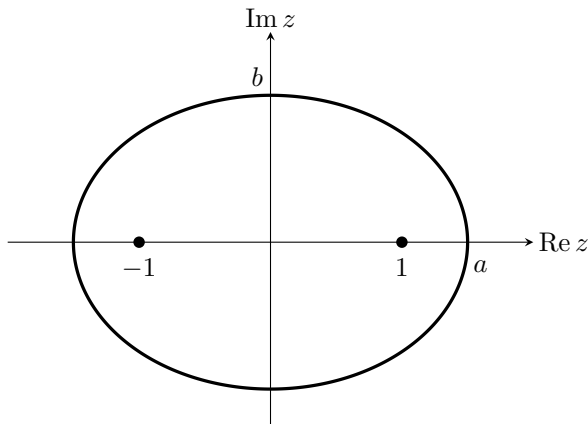


Рис. 8. Эллипс (большая полуось $a = \frac{3}{2}$, малая полуось $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$)

Замечание. Вообще говоря, с самого начала можно было заметить, что уравнение (3) задаёт множество точек z , для которых сумма расстояний до двух данных (-1 и 1) постоянна (и равна 3). Другими словами, это уравнение эллипса с фокусами в точках -1 и 1 .

△

Пример 5. Найти множество точек z на комплексной плоскости, для которых выполняется условие

$$|z - i| = |z - 1|. \quad (6)$$

Решение. Заметим, что $|z - i|$ — это расстояние от z до i , а $|z - 1|$ — расстояние от z до 1 . Таким образом, множество точек z , удовлетворяющих (6), является множеством точек, равноудалённых от двух данных (от i и от 1). Это множество представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему данные точки (рис. 9).

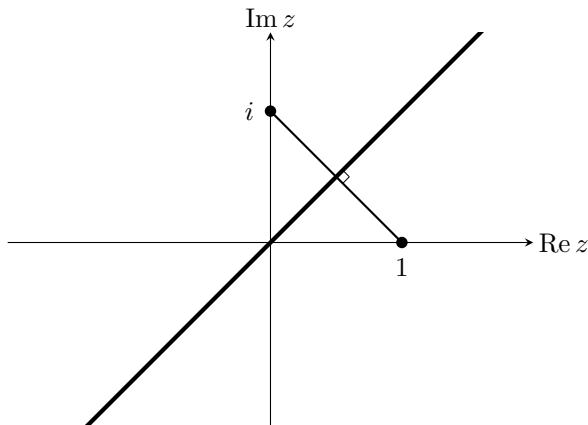


Рис. 9. Серединный перпендикуляр к отрезку $[1, i]$

△

Пример 6. Для всех комплексных чисел z и w , удовлетворяющих соотношениям $|z| = 12$ и $|w - 3 - 4i| = 5$, найти минимум и максимум модуля разности $|z - w|$.

Решение. Заметим, что все числа z , удовлетворяющие соотношению $|z| = 12$, образуют окружность с центром в нуле и радиусом 12. Соотношение $|w - 3 - 4i| = 5$ задаёт окружность с центром в точке $3 + 4i$ и радиусом 5. В свою очередь, величина $|z - w|$ есть расстояние между точками z и w . Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти минимальное и максимальное расстояние между точками z и w , лежащими на соответствующих окружностях. Построим эти окружности.

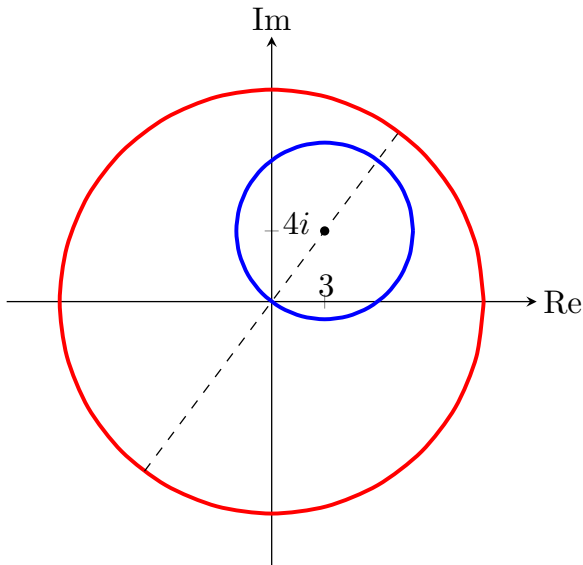


Рис. 10. Окружности $|z| = 12$ и $|w - 3 - 4i| = 5$

Из рис. 10 очевидно, что 12 — максимальное расстояние, а 2 — минимальное¹.

¹Кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися окружностями

1.2. Тригонометрическая форма записи

Пусть $z = x + iy$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$, тогда

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (7)$$

Обозначим $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Из (7) выводим

$$\operatorname{Re} z = x = \rho \cos \varphi \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z = y = \rho \sin \varphi. \quad (8)$$

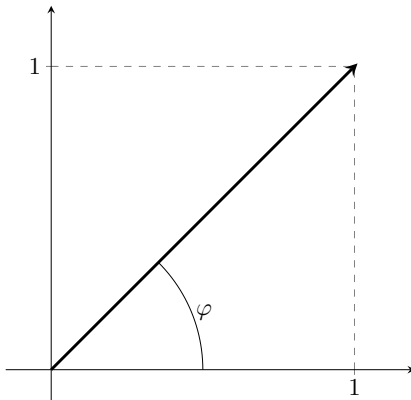
В итоге из (8) имеем

$$z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Запись комплексного числа вида $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\rho = |z|$, а $\varphi = \operatorname{Arg} z$, называется **тригонометрической**.

Пример 7. Записать число $z = 1 + i$ в тригонометрической форме.

Решение. Данное число z на комплексной плоскости является вектором с координатами $(1, 1)$.



Вектор направлен по диагонали единичного квадрата, и поэтому угол $\varphi = \pi/4$. Длина вектора (модуль z) $\rho = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.

Таким образом,

$$z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$

△

радиусов R и r равно $d - (R + r)$, если одна окружность лежит вне другой, и $R - (d + r)$, если одна – внутри другой (d – расстояние между центрами).

1.2.1. Произведение в тригонометрической форме

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, а $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ — два комплексных числа (в тригонометрической записи), тогда несложно проверить, что их произведение можно вычислить следующим образом:²

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (9)$$

Другими словами, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.

В свою очередь, деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, имеет вид

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Таким образом, модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.

Пример 8. Найти произведение и частное комплексных чисел:

$$z_1 = 3 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right), z_2 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Решение. По формуле умножения комплексных чисел в тригонометрической форме получаем

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 3 \cdot 2 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) = \\ &= 6 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) = 3\sqrt{2} + i3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

²Используя формулы $\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ и $\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$.

По формуле деления получаем

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3}{2} \cdot \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(\cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right) = 3\sqrt{2} + i3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

△

Формула (9) для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена. В частности,

$$\begin{aligned}z^2 &= \rho^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi), \\ z^{-1} &= \rho^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).\end{aligned}$$

И для любого целого числа k верно

$$z^k = \rho^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi). \quad (10)$$

Другими словами, формула (10) задаёт способ возведения комплексного числа в степень.

Пример 9. *Вычислить*

$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{10}.$$

Решение. Представим число $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрической форме. Получим

$$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Далее по формуле (10) вычисляем:

$$\begin{aligned}\left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)^{10} &= \left(\cos \left(-\frac{10\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{10\pi}{3} \right) \right) = \\ &= \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

△

При $\rho = 1$ из выражения (10) выводится **формула Муавра**³:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi. \quad (11)$$

Эту формулу можно использовать для нахождения синусов и косинусов кратных углов.

³Часто формулой Муавра называют выражение (10).

Пример 10. Вывести формулы для $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$.

Решение. Запишем выражение (11) в частном случае ($k = 3$):

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

Используя формулу (??), распишем левую часть:

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 &= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi) = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

Приравнявая действительные и мнимые части, имеем

$$\begin{aligned} \sin 3\varphi &= 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi, \\ \cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

△

Пример 11. Вычислить $(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi + 1)^n$.

Решение. Воспользуемся следующими тригонометрическими формулами:

$$1 + \cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi \quad \text{и} \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi + 1 &= 2 \cos^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \\ &= 2 \cos \varphi (\cos \varphi + i \sin \varphi). \end{aligned}$$

Далее с помощью формулы Муавра (11) возводим в степень n :

$$(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi + 1)^n = 2^n \cdot \cos^n \varphi \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

△

Пример 12. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ и известно, что $z^{2n} \neq -1$. Проверить, что $\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ является действительным числом (т. е. $\operatorname{Im} \frac{z^n}{1+z^{2n}} = 0$).

Решение. Поскольку $|z| = 1$, то

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

а по формуле (11)

$$z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad \text{и} \quad z^{2n} = \cos 2n\varphi + i \sin 2n\varphi.$$

Далее, используя формулы

$$1 + \cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi \quad \text{и} \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi,$$

имеем

$$\begin{aligned} 1 + z^{2n} &= 1 + \cos 2n\varphi + i \sin 2n\varphi = \\ &= 2 \cos^2 n\varphi + i 2 \sin n\varphi \cos n\varphi = 2 \cos n\varphi (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{2 \cos n\varphi (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)} = \frac{1}{2 \cos n\varphi}.$$

△

Пример 13. Вычислить $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2013}$.

Решение. Представим число $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в тригонометрической форме:

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi.$$

Применяя формулу возведения в степень, получим

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2013} &= \cos \left(2013 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin \left(2013 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) = \\ &= \cos 1342\pi + i \sin 1342\pi = 1. \end{aligned}$$

△

1.2.2. Извлечение корней из комплексных чисел

Тригонометрическая запись комплексных чисел оказывается удобной и для извлечения корней n -й степени.

Напомним, что корень n -й степени $z^{\frac{1}{n}}$ (или $\sqrt[n]{z}$) — это комплексное число w , для которого выполнено условие $w^n = z$, т. е. при возведении этого числа в степень n мы получим z .

Если $z \neq 0$, то существует n различных корней n -й степени из числа z :

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (12)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и $\varphi = \arg z$.

При этом числа w_k имеют одинаковый модуль (равный $\sqrt[n]{|z|}$) и расположены в вершинах правильного n -угольника (для случая $\sqrt[8]{1}$ см рис. 11). Если $n = 2$, то значения корня лежат на диаметре окружности с центром в нуле.

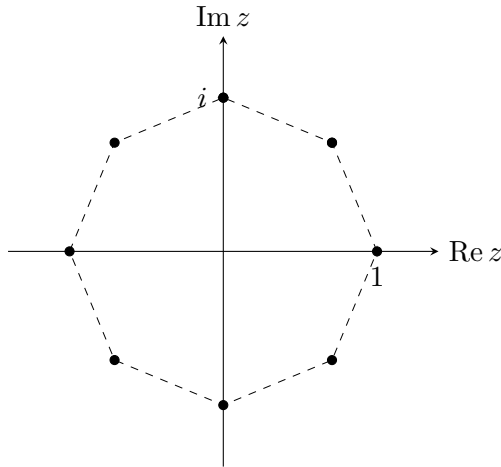


Рис. 11. Все значения $\sqrt[8]{1}$

Заметим, что в формуле (12) $\sqrt[n]{|z|}$ — это арифметический ко-

рень из положительного числа, а значит, определён однозначно.

Особенность извлечения корня из комплексного числа заключается в следующем. Если мы будем рассматривать $\sqrt[n]{z}$ как функцию от z :

$$f(z) = \sqrt[n]{|z|},$$

то в каждой точке (за исключением нуля) $f(z)$ будет принимать ровно n различных значений. Таким образом, $\sqrt[n]{z}$ является примером многозначной функции.

Пример 14. *Вычислить $\sqrt{1+i}$ и изобразить на комплексной плоскости.*

Решение. Сначала нужно представить число $1+i$ в тригонометрической форме. Мы это уже сделали в примере 7.:

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right),$$

где $\rho = |z| = \sqrt{2}$ и $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

Поскольку $n = 2$, то в соответствии с формулой (12) имеем два корня:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right), \\ w_2 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8}\right). \end{aligned}$$

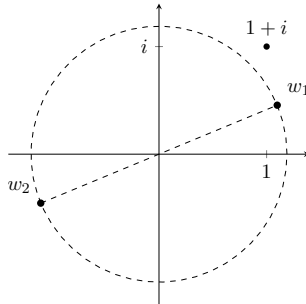


Рис. 12. Значения квадратного корня $\sqrt{1+i}$

На рис. 12 изображены значения корня w_1, w_2 , они расположены на окружности радиусом $\sqrt[4]{2}$. $\triangle$

Пример 15. На комплексной плоскости задан треугольник с вершинами в точках $1, 2i, -1$ (рис. 13).

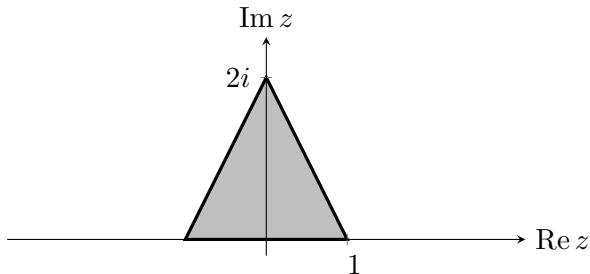


Рис. 13. треугольник с вершинами в точках $1, 2i, -1$

Найти, как изменится треугольник, если для всех точек z из этого треугольника выполнить следующие действия:

$$1) z \cdot i, \quad 2) z + i, \quad 3) \frac{z}{i}, \quad 4) z - i.$$

Решение. Исходя из геометрического смысла указанных действий можно увидеть: 1) умножение на i - поворот против часовой стрелки на угол 90° , 2) прибавление i - сдвиг по мнимой оси в положительном направлении, 3) деление на i - поворот против часовой стрелки на угол 90° , 4) вычитание i - сдвиг в отрицательном направлении (см. рис. 14).

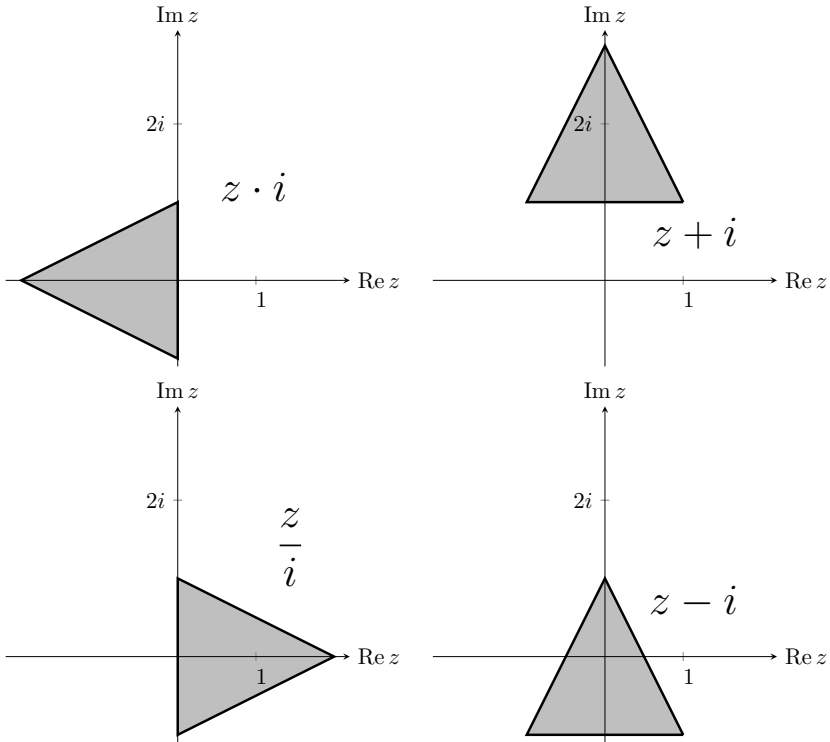


Рис. 14. Образ треугольника при различных действиях

△

Пример 16. Найти все такие $z \in \mathbb{C}$, что

$$\arg(z - i) < \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Обозначим $w = z - i$ и решим неравенство $\arg(w) < \frac{\pi}{6}$. Все числа w , аргумент которых меньше чем, $\pi/6$, находятся в заштрихованной области на рис. 15. Поскольку $z = w + i$, то искомая область будет сдвинута на единицу по мнимой оси в положительном направлении.

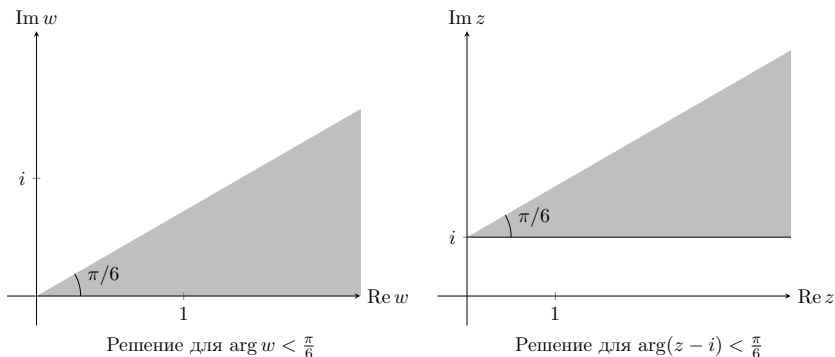


Рис. 15. К примеру 16.

△

1.3. Показательная форма записи

Существует ещё одна форма записи комплексных чисел. Для этой формы потребуется ввести понятие комплексной экспоненты e^z .

1.3.1. Комплексная экспонента

Экспонента e^z является примером комплексной функции комплексного переменного.

Комплексную экспоненту определяют в виде суммы степенного ряда (см. п. ??):

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

или как предел последовательности:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \quad (13)$$

Основные свойства функции e^z — это

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad \text{и} \quad (e^z)^w = e^{z \cdot w}, \quad (14)$$

где $z, w \in \mathbb{C}$ — любые комплексные числа. Далее нам потребуется **формула Эйлера**:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (15)$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — действительное число.

В частности получаем, что

$$|e^{i\varphi}| = 1$$

для любого $\varphi \in \mathbb{R}$.

При подстановке в формулу (15) конкретных значений φ выводим следующие соотношения:

$$e^0 = 1, \quad e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1,$$

и

$$e^{2\pi ki} = 1, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Равенство

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

связывает между собой пять самых распространённых математических постоянных и считается одним из величайших математических соотношений.

1.3.2. Запись в показательной форме

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $\rho = |z|$ и $\varphi = \arg z$, тогда число z можно записать в виде

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Пример 17. Записать число $z = 1 + i$ в показательной форме.

Решение. Ранее в примере 7. мы вычислили величины $\arg z = \frac{\pi}{4}$ и $\rho = \sqrt{2}$. Следовательно,

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

△

Показательная форма удобна для таких операций, как умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

Пусть $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

и

$$(z)^n = \rho^n e^{in\varphi}, \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Пример 18. Найти действительные корни уравнения

$$\cos x + i \sin x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i.$$

Решение. По формуле Эйлера $\cos x + i \sin x = e^{ix}$, $|e^{ix}| = 1$ для любого действительного x , значит, $|\cos x + i \sin x| = 1$.

С другой стороны, для модуля правой части имеем

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i \right| = \frac{\sqrt{13}}{4} \neq 1.$$

Следовательно, у данного уравнения действительных корней не существует. △

Сфера Римана. Бесконечно удаленная точка

В этом пункте мы рассмотрим подход, который позволяет ввести понятие бесконечно удаленной точки на комплексной плоскости. Более полное изложение приведено в [?].

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство с координатами (ξ, η, θ) и совместим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с плоскостью $O\xi\eta$ так, чтобы действительная ось совпала с осью $O\xi$, мнимая ось с осью $O\eta$, и положительные направления на соответствующих осях совпадали.

Обозначим через S сферу с центром в точке $(0, 0, \frac{1}{2})$ радиуса $\frac{1}{2}$, имеющую уравнение

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad (16)$$

а точку $(0, 0, 1)$ назовем **полюсом** сферы S и обозначим символом P . Соединим отрезком точку $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ с полюсом P , при этом отрезок пересечет сферу S в единственной точке $M(\xi, \eta, \theta)$. Точка M называется **стереографической проекцией** точки $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ на сферу S .

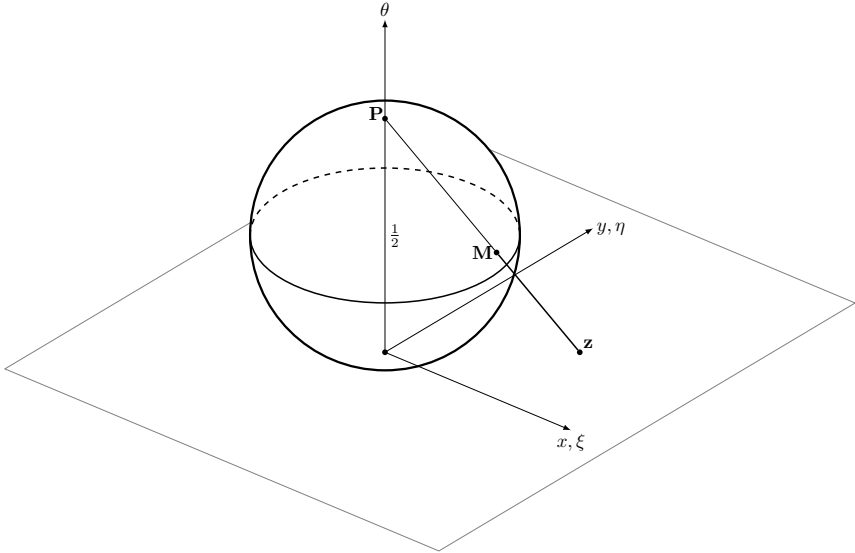


Рис. 16. Сфера Римана

Стереографическая проекция устанавливает взаимно однознач-

ное соответствие между точками комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и точками сферы S с выколотым полюсом P .

В силу коллинеарности точек $P(0, 0, 1)$, $M(\xi, \eta, \theta)$ и $\mathbf{z}(x, y, 0)$ имеем

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{1 - \theta}{1},$$

откуда выводим

$$x = \frac{\xi}{1 - \theta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \theta}, \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \theta}. \quad (17)$$

Поскольку

$$|z|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \theta)^2},$$

то из уравнения сферы (16) получаем

$$|z|^2 = \frac{\theta}{1 - \theta}. \quad (18)$$

Выражая из равенства (18) значение θ и подставляя его в равенства (17), находим

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \theta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \quad (19)$$

Формулы (19) называют формулами стереографической проекции.

При неограниченном удалении точки z от нуля в произвольном направлении (вдоль произвольной прямой) образ этой точки на сфере всегда будет стремиться к полюсу P . Добавим к комплексной плоскости $\mathbb{C}$ *идеальный объект*, называемый **бесконечно удаленной точкой** и обозначаемый символом ∞ . Далее комплексную плоскость с присоединенной к ней бесконечно удаленной точкой будем называть **расширенной комплексной плоскостью** и обозначать символом $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Если мы доопределим стереографическую проекцию, полагая полюс P образом бесконечно удаленной точки, то получим взаимно однозначное соответствие между расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$ и сферой S .

Стандартной окрестностью полюса P на сфере является «шапочка», т.е. часть сферы S , расположенная выше некоторой плоскости $\theta = a$, $0 < a < 1$. Стандартной окрестностью бесконечно удаленной точки на комплексной плоскости является прообраз стандартной окрестности полюса P при стереографической проекции, т.е. множество $U = \{|z| > r > 0\}$ — внешность круга с центром в нуле. При таком определении стереографическая проекция будет непрерывна и в бесконечно удаленной точке. При этом отображение всей расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на сферу S будет гомеоморфизмом. Сферу S , на которой изображены комплексные числа, называют *сферой Римана*.

Естественным образом определяется сходимость последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ к бесконечно удаленной точке: $z_n \rightarrow \infty$, если для любой окрестности бесконечно удаленной точки U найдется такой номер n_0 , что при $n > n_0$ точки z_n принадлежат окрестности U . Это определение эквивалентно тому, что $|z_n| \rightarrow +\infty$ (более подробно про предел последовательности см. главу ??).

Задачи к главе 1

1. $z = 1 - i$. Найти $|z|$ и $\arg z$. $\blacksquare$
2. Пусть $|z| = 2$ и $\arg z = \frac{\pi}{6}$. Представить z в виде $x + iy$. $\blacksquare$
3. Пусть $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ и $z_0 \in \mathbb{C}$ фиксированная точка. Найти геометрическое место точек z на комплексной плоскости, таких, что:

а) $\alpha \leq \arg z \leq \beta$, б) $\alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta$.

$\blacksquare$
4. Найти геометрическое место точек z на комплексной плоскости, которые удовлетворяют соотношению $|z - i| + |z + i| = 16$. $\blacksquare$

5. Пусть z_1, z_2 — фиксированные комплексные числа. Найти геометрическое место точек, соответствующих числам z , таким, что:

$$\text{а) } |z - z_1| = |z - z_2|, \quad \text{б) } |z - z_1| = |z + z_1|.$$



6. Представить $z = \sqrt{3} + i$ в тригонометрической форме. ▮▮▮▮➡

7. Представить $z = -2 + i2\sqrt{3}$ в тригонометрической форме. ▮▮▮▮➡

8. Представить $\frac{2 - 2i}{1 - \sqrt{3}}$ в тригонометрической форме. ▮▮▮▮➡

9. Представить число

$$\frac{1 - \cos \alpha - i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}$$

в алгебраической форме. ▮▮▮▮➡

10. Найти произведение комплексных чисел $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right), \quad z_2 = 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right).$$



11. Вычислить $(1 + \sqrt{3}i)^9$. ▮▮▮▮➡

12. Вычислить $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^9$. ▮▮▮▮➡

13. Вычислить:

$$\text{а) } u = (1 + i\sqrt{3})^{13} + (1 - i\sqrt{3})^{13}; \quad \text{б) } v = \frac{(1 + i\sqrt{3})^{13} - (1 - i\sqrt{3})^{13}}{i}.$$



14. Вывести формулы для $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$. ▮▮▮▮➡

15. Вычислить $(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi - 1)^n$. $\blacksquare$
16. Вычислить $(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n$, где $n \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$
17. Вывести формулу для $(1 + i)^n + (1 - i)^n$. $\blacksquare$
18. Представить в показательной форме числа $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ и $z_2 = 1 - i$. $\blacksquare$
19. Представить в показательной форме следующие комплексные числа:
- а) $(1 + i \operatorname{tg} \alpha)^{-1}$; если $|\alpha| < \pi/2$, б) $1 + i\sqrt{3}$; в) $-\sqrt{6} + i\sqrt{2}$;
 г) $1 - (2 - \sqrt{3})i$; д) $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$; где $|\alpha| < \pi$;
 е) $1 - \cos \alpha - i \sin \alpha$ при $0 < \alpha < 2\pi$;
 ж) $(1 - e^{2i\alpha})(1 - e^{2i\beta})$; если $0 < \alpha, \beta < \pi$.

 $\blacksquare$

20. Проверить, что для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$|z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2| \leq 2|z_1 z_2|.$$

 $\blacksquare$

21. Найти образы точек

$$\text{а) } z = 1, \quad \text{б) } z = i, \quad \text{в) } z = \frac{1 - i}{\sqrt{2}}$$

при стереографической проекции. $\blacksquare$

22. При каком условии стереографическими проекциями точек z_1 и z_2 являются диаметрально противоположные точки сферы Римана? $\blacksquare$
23. Что соответствует на сфере Римана семейству параллельных прямых на комплексной плоскости? $\blacksquare$