Комплексный анализ

Арифметика и геометрия комплексных чисел

Никита Александрович Евсеев

Физический факультет Новосибирского государственного университета

Китайско-российский институт Хэйлунцзянского университета

29 февраля 2016

Числа

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Определения

$z = x + iy$ — комплексное число ($x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$)

$\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел

$x = \mathrm{Re}\, z$ — действительная часть комплексного числа $z = x + iy$

$y = \mathrm{Im}\, z$ — мнимая часть комплексного числа $z = x + iy$

Операции

Пусть $z = x + iy$ и $w = u + iv$, тогда

$z + w = (x + u) + i(y + v)$ — сумма комплексных чисел
$zw = (xu - yv) + i(yu + xv)$ — произведение комплексных чисел

Свойства

$$
\begin{aligned}
&z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 && \text{(коммутативность)},\\
&(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) && \text{(ассоциативность)},\\
&z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 && \text{(дистрибутивность)}.
\end{aligned}
$$

Частным от деления комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0$ называется такое комплексное число $w = \dfrac{z_1}{z_2}$, которое при умножении на z_2 даёт z_1.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

Произведение n равных комплексных чисел z называется n-й ***степенью*** числа z и обозначается символом z^n:

$$z^n = \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ раз}}.$$

Свойства

$$z^{n \cdot m} = (z^n)^m, \quad z^{n+m} = z^n \cdot z^m,$$

$$(w \cdot z)^n = w^n \cdot z^n.$$

$$z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n, \quad z^0 = 1.$$

Формулы

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3.$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b),$$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w, такое, что

$$w^n = z.$$

Обозначение: $w = \sqrt[n]{z}$ или $w = z^{\frac{1}{n}}$.

$\sqrt[n]{z}$ — корень n-й степени

$\sqrt{z}$ — квадратный корень $\sqrt[3]{z}$ — кубический корень

Модуль числа $z = x + iy$ определяется как $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Свойства

$$|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0;$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad |z^n| = |z|^n;$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{при } z_2 \neq 0;$$

$$|\operatorname{Re} z| \leqslant |z| \text{ и } |Iz| \leqslant |z|, \qquad (|x| \leqslant |z| \text{ и } |y| \leqslant |z|);$$

$$|z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |Iz|, \qquad (|z| \leqslant |x| + |y|);$$

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \qquad \text{(неравенство треугольника)};$$

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

Модуль

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$, называют ***сопряжённым*** к числу $z = x + iy$.

Свойства

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};$$

$$\bar{\bar{z}} = z;$$

$$z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (Iz)^2\,, \quad (z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2);$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}};$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \quad \text{и} \quad z - \bar{z} = 2iIz;$$

Пример 1.

Пусть $z_1 = -3 + 5i$ и $z_2 = 4 - 6i$, найти

а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\overline{z_1},\ \overline{z_2}$; д) $|z_1|,\ |z_2|$.

Пример 1.

Пусть $z_1 = -3 + 5i$ и $z_2 = 4 - 6i$, найти

а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\overline{z_1},\ \overline{z_2}$; д) $|z_1|,\ |z_2|$.

Пример 2.

Пусть $z_0 = a + ib$. Найти такое комплексное число z, что $z_0 \cdot z \in \mathbb{R}$.

Пример 3.

Пусть $z_1 = -3 + 5i$ и $z_2 = 4 - 6i$, найти $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Пример 3.

Пусть $z_1 = -3 + 5i$ и $z_2 = 4 - 6i$, найти $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Пример 4.

Найти значение выражения $\dfrac{z_1(z_2 + z_3)}{z_2}$,

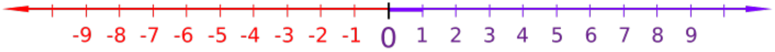
где $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 7 - 9i$.

Задачи

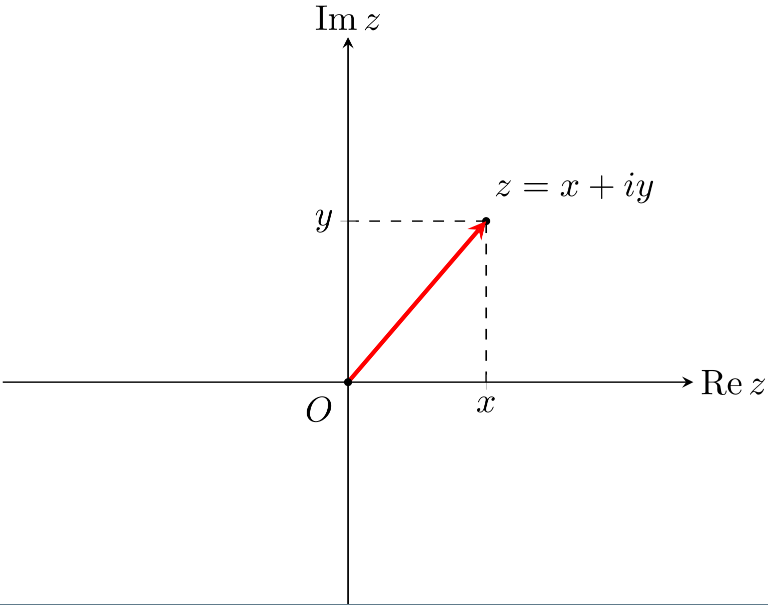
4 в), г); 5 в), г); 10; 11; 13; 14; 16; 19; 21.

Геометрия

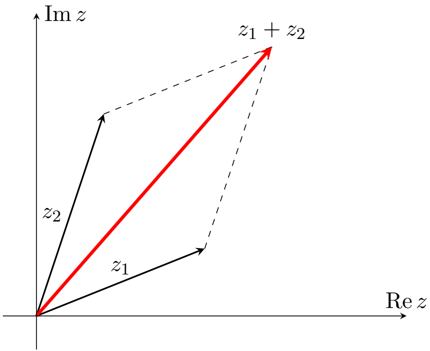
Числовая прямая — $\mathbb{R}$

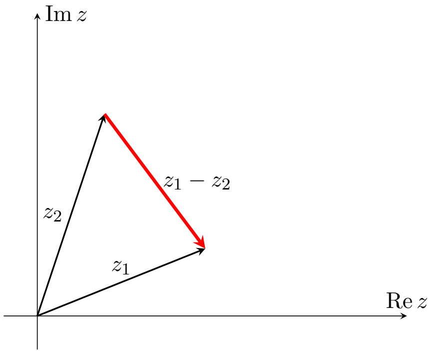


Комплексная плоскость

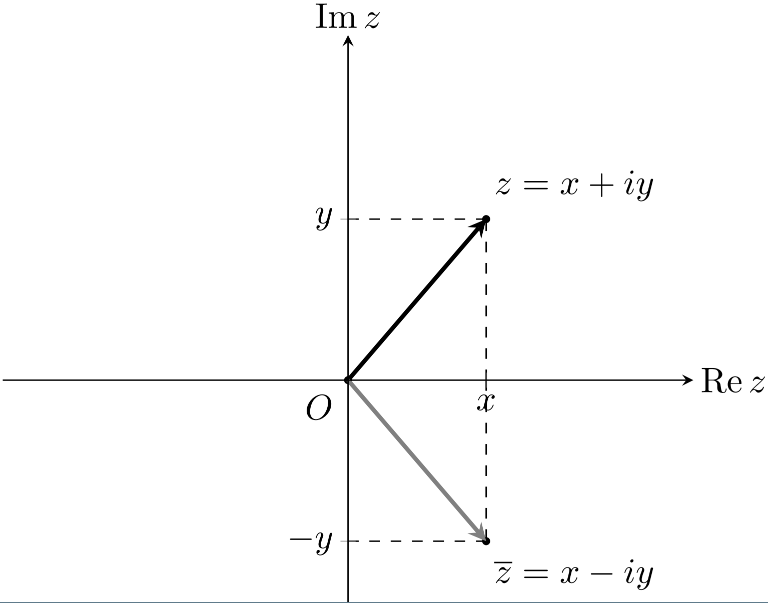


Сумма и разность на комплексной плоскости



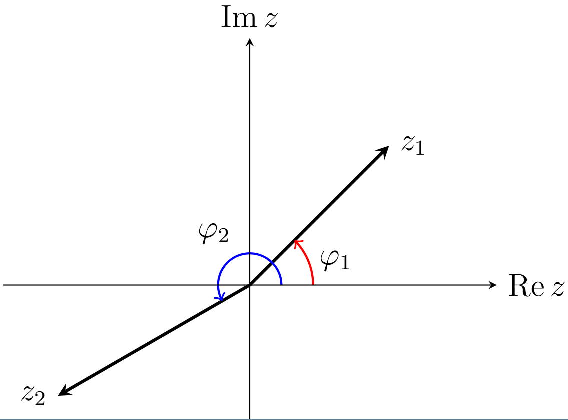


Сопряжение



Модуль

Модуль комплексного числа $|z|$ это расстояние до начала на координат комплексной плоскости.
Аргументом числа $z = x + iy$ называется угол φ между вектором (x, y) и положительным направлением оси $\mathrm{Re}\, z$ измеряемый против хода часовой стрелки.



Аргумент

Аргумент комплексного числа определен не однозначно, в общем виде аргумент можно записать как

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z},$$

где $0 \leqslant \arg z < 2\pi$ — ***главное значение*** аргумента

Пример 5.

$z = 1 - i$. Найти $|z|$, $\arg z$ и $\operatorname{Arg} z$.

Пример 5.

$z = 1 - i$. Найти $|z|$, $\arg z$ и $\operatorname{Arg} z$.

Ответ: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{7\pi}{4}$, $\operatorname{Arg} z = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$.

Пример 6.

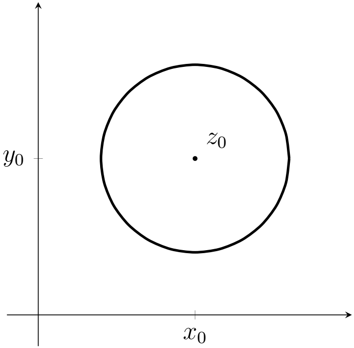
Зафиксируем $z_0 \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Изобразить точки z, которые удовлетворяют условиям:

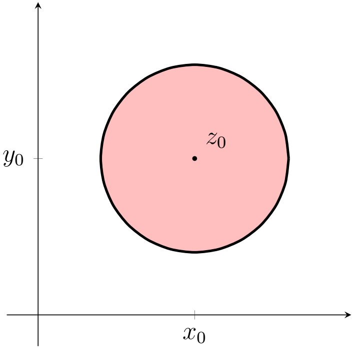
$$1)\ |z - z_0| = r, \quad 2)\ |z - z_0| \leqslant r.$$

Пример 6.

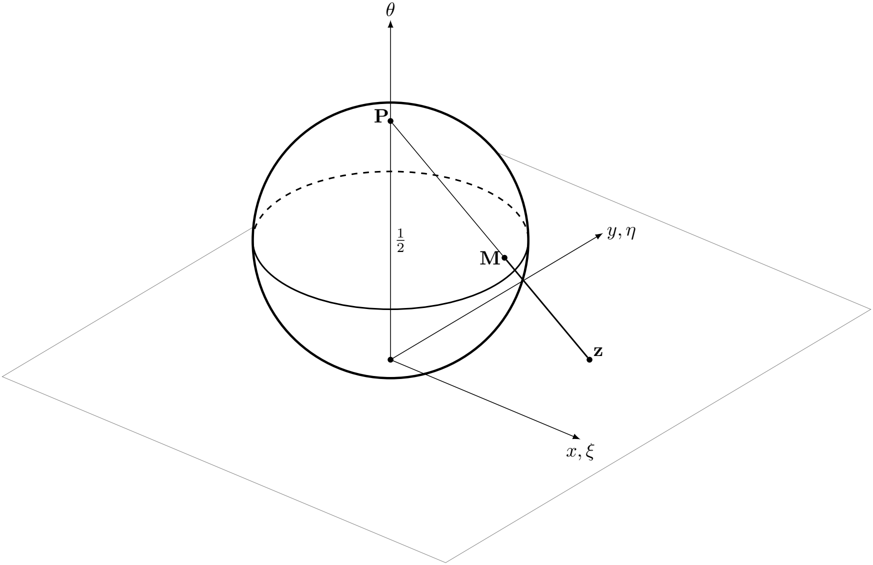
Зафиксируем $z_0 \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Изобразить точки z, которые удовлетворяют условиям:

$$1)\ |z - z_0| = r, \quad 2)\ |z - z_0| \leqslant r.$$





Сфера Римана



Сфера Римана

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{Уравнение сферы}$$

Сфера Римана

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$ Уравнение сферы

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{1-\theta}{1}$$ Свойство колинеарности

Сфера Римана

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$ Уравнение сферы

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{1-\theta}{1}$$ Свойство колинеарности

$$x = \frac{\xi}{1-\theta},\ y = \frac{\eta}{1-\theta}, z = \frac{\xi + i\eta}{1-\theta}.$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{Уравнение сферы}$$

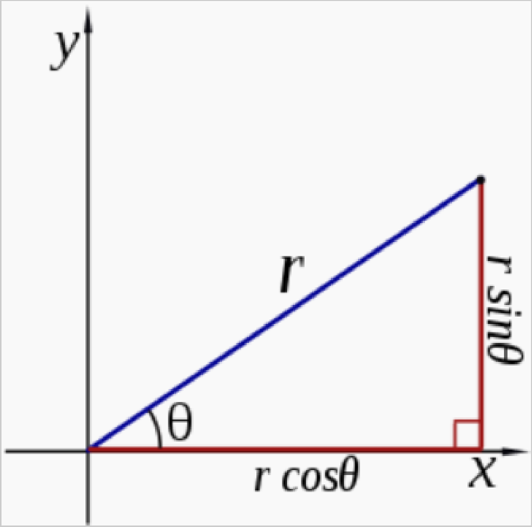
$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{1-\theta}{1} \quad \text{Свойство колинеарности}$$

$$x = \frac{\xi}{1-\theta},\ y = \frac{\eta}{1-\theta}, z = \frac{\xi + i\eta}{1-\theta}.$$

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2},\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2},\ \theta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

Формулы стереографической проекции.

Полярные координаты



極坐標與直角坐標之間的關係。

Обозначим $\rho = |z|\sqrt{x^2 + y^2}$.

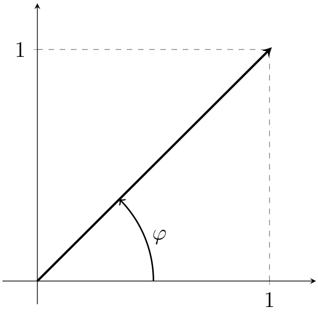
$$x = \rho \cos \varphi \quad \text{и} \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Тригонометрическая форма

$$z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Пример 1.

Записать число $z = 1 + i$ в тригонометрической форме.



$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

Произведение в тригонометрической форме

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Для любого целого числа ($k \in \mathbb{Z}$) верно

$$z^k = \rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

Формула Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi.$$

公式 [编辑]

當一個複數z以极坐标形式表達，即$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$時，其$n$次方$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$，其中$n$屬於任何整數。

Пример 2.

Вычислить $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2015}$

Пример 2.

Вычислить $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2015}$

Извлечение корней

Если $z \neq 0$, то существует n различных корней n-й степени из числа z:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и $\varphi = \arg z$.

Пример 3.

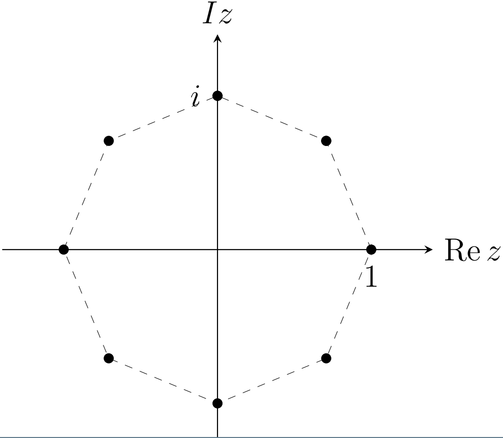
Вычислить $\sqrt[3]{1+i}$

Пример 3.

Вычислить $\sqrt[3]{1+i}$

Пример 4.

Вычислить $\sqrt[8]{1}$



Комплексная Экспонента

Комплексную экспоненту определяют в виде суммы степенного ряда:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

или как предел последовательности:

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Примеры

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $\rho = |z|$ и $\varphi = \arg z$, тогда число z можно записать в виде

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

Пример 5.

Записать число $z = 1 + i$ в показательной форме.

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Умножение и деление

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Степень и корень

$$(z)^n = \rho^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Пример 5.

Представить в показательной форме числа
$z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ и $z_2 = 1 - i$

$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$