Комплексный анализ

Последовательности и ряды комплексных чисел

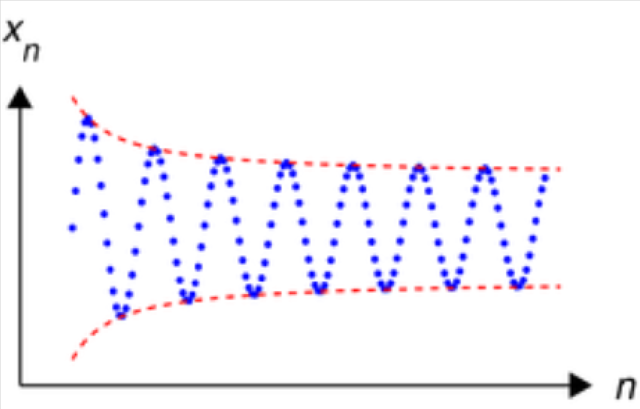
Никита Александрович Евсеев

Физический факультет Новосибирского государственного университета

Китайско-российский институт Хэйлунцзянского университета

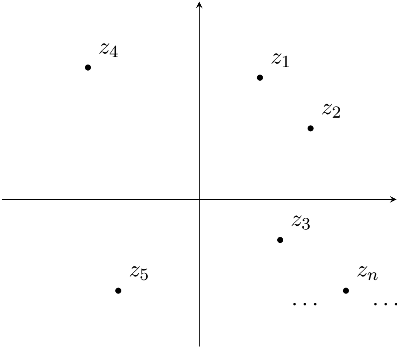
1 Марта 2015

Последовательность



一个实数的无限序列（蓝色）。这个序列既不是递增的也不是递减的更不是收敛的，但它是有界的。

Последовательность комплексных чисел — это закон (или правило), по которому каждому натуральному числу соответствует определённое комплексное число.



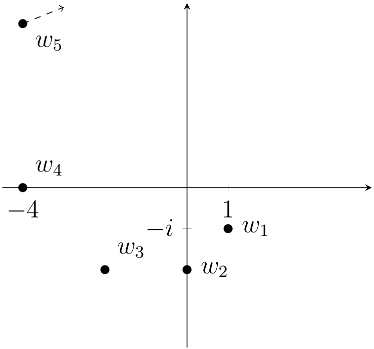
Пример 1.

$$w_n = (1 - i)^n$$

Примеры

Пример 1.

$$w_n = (1 - i)^n$$



Определение

Последовательность называется ***ограниченной***, если все её значения ограничены, т. е. существует положительное число $M < \infty$, такое, что $|z_n| < M$ для всех n.

定義 [编辑]

设$\{x_n\}, x_n \in \mathrm{R}, n = 1, 2, \ldots, x_0 \in \mathrm{R}$,

对于任意的正实数ϵ，存在自然数N，使得当n>N时，有 $|x_n - x_0| < \epsilon$,

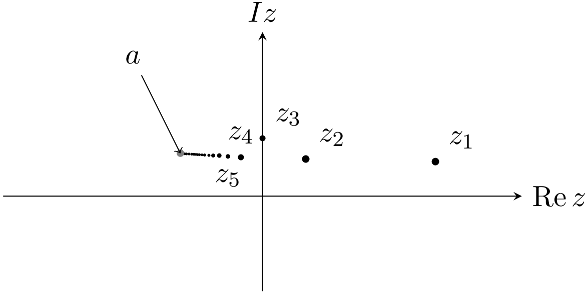
用符号来表示即

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |x_n - x_0| < \epsilon$$

则称数列$\{x_n\}$**收敛**于x_0，**记作**$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$。

Комплексное число a называется ***пределом*** последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n - a| < \varepsilon.$$



Пример 2.

Найти предел последовательности:

$$z_n = \frac{3-n}{n} + i\frac{n+1}{2n+3}.$$

Пример 2.

Найти предел последовательности:

$$z_n = \frac{3-n}{n} + i\frac{n+1}{2n+3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -1 + i\frac{1}{2}$.

Пример 3.

Найти предел последовательности

$$z_n = \frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

Пример 3.

Найти предел последовательности

$$z_n = \frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

Ответ: 0

Примеры

$$\lim_{n\to\infty} z^n =$$

Примеры

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0 & \text{при } |z| < 1, \\ \text{не существует} & \text{при } |z| = 1, z \neq 1, \\ 1 & \text{при } z = 1, \\ \infty & \text{при } |z| > 1. \end{cases}$$

Свойства предела

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = b.$$

Выполняются следующие свойства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = a + b$;

Свойства предела

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = b.$$

Выполняются следующие свойства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = a + b$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \cdot w_n) = a \cdot b$;

Свойства предела

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = b.$$

Выполняются следующие свойства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n + w_n) = a + b$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = a \cdot b$;
3) если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{a}{b}$.

Найти следующие пределы:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{3+in^2}; \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+in^2}{n^2+1};$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(i)^n}{3^{n+1}}; \qquad 4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{in}{2^n}.$$

Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty} e^{i\frac{\pi}{n}}.$$

Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(n i^{\frac{1}{n}}).$$

无穷级数的定义 [编辑]

设(u_n)是一个无穷序列 ：$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$，其前n项的和称为$\sum u_n$的**部分和**：

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

(u_n)部分和依次构成另一个无穷序列：$s_1, s_2, s_3, \ldots s_n, \ldots$

这两个序列合称为一个级数，记作$\sum u_n$或者$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其中$\sum$符號為求和号。

Пусть задана последовательность (комплексных) чисел $\{a_n\}$. Формальная сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \cdots$ называется числовым ***рядом*** и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Некоторые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{2n-1} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \cdots = \pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2.$$

Определение

Последовательность ***частичных сумм*** $\{s_n\}$ ряда $\sum a_n$:

$$\begin{aligned} &s_1 = a_1, \\ &s_2 = a_1 + a_2, \\ &s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n. \end{aligned}$$

Определение

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$ и $|S| < \infty$, то говорят, что ряд $\sum a_n$ ***сходится*** и сумма ряда равна S

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Ели предела частичных сумм не существует или предел равен бесконечности, то говорят что ряд ***расходится***

Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

Пример 4.

Проверить сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n(n+1)}.$$

Пример 4.

Проверить сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n(n+1)}.$$

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n(n+1)} = i.$$

Пример 5.

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + in(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Пример 5.

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + in(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + in(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + i \ln 2.$$

Необходимый признак сходимости

Если ряд $\sum a_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Если ряд $\sum a_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n = i - 1 - i + 1 \cdots$$

необходимый признак **не** выполнен

Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+i}$$

расходится.

Геометрическая прогрессия

等比数列（又名**几何数列**）：是一种特殊数列。它的特点是：从第2项起，每一项与前一项的比都是一个常数。

例如数列$2, 4, 8, 16, 32, \cdots, 2^{197}, 2^{198}, 2^{199}, \cdots$。

这就是一个等比数列，因为第二项与第一项的比和第三项与第二项的比相等，都等于2，2^{198}与2^{197}的比也等于2。如2这样后一项与前一项的比称公比，符号为q。

Геометрическая прогрессия

$$b, \quad bq, \quad bq^2, \quad bq^3, \quad bq^4, \quad \dots$$

или

$$a_1 = b \quad \text{и} \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{для } n = 2, 3, \dots,$$

Частичная сумма геометрической прогрессии

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$q \neq 1$$

Пример 6.

Найти частичную сумму s_n геометрической прогрессии $a_n = (1+i) \cdot 2^{n-1}$.

Пример 6.

Найти частичную сумму s_n геометрической прогрессии
$$a_n = (1+i) \cdot 2^{n-1}.$$

Ответ:

$$s_n = (1+i) \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = (1+i) \cdot (2^n - 1).$$

Если $a_1 = 1$, то

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Пример 7.

Пусть $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, вычислить $1 + z + z^2 + ... + z^{20}$.

Пример 7.

Пусть $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, вычислить $1 + z + z^2 + ... + z^{20}$.

Ответ:

$$s_{20} = (1 + \sqrt{2})i.$$

Если $|q| \leqslant 1$, то можно посчитать сумму геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$$