Комплексный анализ

Функции комплексного переменного

Никита Александрович Евсеев

Физический факультет Новосибирского государственного университета

Китайско-российский институт Хэйлунцзянского университета

3 Марта 2016

Если каждому числу $z \in \mathbb{C}$ поставлены в соответствие одно или несколько комплексных чисел w, то говорят, что задана (определена) ***функция*** $f(z) = w$ комплексного переменного.

$$f : \mathbb{C}(z) \to \mathbb{C}(w)$$

Однозначные и многозначные функции

Однозначные функции

$$z^n, \quad e^z, \quad \sin z, \quad \cos z, \quad \arg z, \quad \dots$$

Многозначные функции

$$\sqrt[n]{z}, \quad \mathrm{Ln}\, z, \quad \mathrm{Arg}\, z, \quad \dots$$

Определение

$$f : \mathbb{C}(z) \to \mathbb{C}(w)$$

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \qquad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

Определение

Число $\lambda \in \mathbb{C}$, называется ***пределом*** функции f в точке z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, что для всех чисел z таких, что $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

Пример

Пусть $f(z) = 5z$, доказать по определению, что

$$\lim_{z \to i} f(z) = 5i.$$

Показать, что предела

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$$

не существует.

Функция $f(z)$ называется ***непрерывной*** в точке z_0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Экспонента, Косинус, Синус

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Экспонента, Косинус, Синус

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Формулы

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin z_1 + \sin z_2 = 2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}$$

$$\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}$$

Определение

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Формулы

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1;$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_2 \operatorname{ch} z_1$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$$

$$\operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2}$$

$$\operatorname{ch} z_1 + \operatorname{ch} z_2 = 2 \operatorname{ch} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2}$$

Свойства

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \qquad \sin iz = i \operatorname{sh} z$$

Определение

Функция комплексного переменного $f(z)$ называется ***периодической***, если найдётся такое число $T \in \mathbb{C}$, $T \neq 0$, что

$$f(z+T) = f(z), \qquad \text{для всех } z \in \mathbb{C}.$$

Определение

Функция комплексного переменного $f(z)$ называется ***периодической***, если найдётся такое число $T \in \mathbb{C}$, $T \neq 0$, что

$$f(z+T) = f(z), \qquad \text{для всех } z \in \mathbb{C}.$$

Пример 1.

Функцию $f(z) = \cos z$ записать в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и найти $|\cos z|$

Примеры

Пример 1.

Функцию $f(z) = \cos z$ записать в виде $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и найти $|\cos z|$

Ответ:

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} x - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$$

Пример 2.

Верно ли неравенство $|\cos z| \leqslant 1$

Пример 2.

Верно ли неравенство $|\cos z| \leqslant 1$

Ответ:
Нет, не верно. На комплексной плоскости функции $\sin z$ и $\cos z$ не являются ограниченными

Комплексный логарифм $\operatorname{Ln} z$ является обратной функцией к комплексной экспоненте e^z и определяется равенством

$$e^{\operatorname{Ln} z} = z$$

Комплексный логарифм $\operatorname{Ln} z$ является обратной функцией к комплексной экспоненте e^z и определяется равенством

$$e^{\operatorname{Ln} z} = z$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Пример 3.

Вычислить $\operatorname{Ln} 1$, $\operatorname{Ln}(-1)$ и $\operatorname{Ln} i$

Показательная функция

Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$, тогда

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{z(\ln|a| + i \arg a + 2\pi k i)}, \qquad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Показательная функция

Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$, тогда

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{z(\ln|a| + i \arg a + 2\pi k i)}, \qquad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Степенная функция

Пусть $z, \alpha \in \mathbb{C}$ и $z \neq 0$, тогда

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha(\ln|z| + i \arg z + 2\pi k i)}, \qquad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3.

Вычислить все значения $1^{\sqrt{2}}$.

Пример 3.

Вычислить все значения $1^{\sqrt{2}}$.

Ответ:

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = e^{2\sqrt{2}\pi k i} = \cos 2\sqrt{2}\pi k + i \sin 2\sqrt{2}\pi k.$$

Пример 4.

Вычислить i^i

Пример 4.

Вычислить i^i

Ответ:

$$i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{-\pi(2k+\frac{1}{2})}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Обратные тригонометрические функции $\operatorname{Arcsin} z$ и $\operatorname{Arccos} z$ определяются из условий

$$\sin(\operatorname{Arcsin} z) = z \quad \text{и} \quad \cos(\operatorname{Arccos} z) = z.$$

Обратные тригонометрические функции $\mathrm{Arcsin}\, z$ и $\mathrm{Arccos}\, z$ определяются из условий

$$\sin(\mathrm{Arcsin}\, z) = z \quad \text{и} \quad \cos(\mathrm{Arccos}\, z) = z.$$

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\, \mathrm{Ln}\, i(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

$$\mathrm{Arccos}\, z = -i\, \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Пример 5.

Найти все значения $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}$.

Пример 5.

Найти все значения $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}$.

Ответ:

$$\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi. \end{cases}$$

Задача **1**.

Функцию $f(z) = \sin z$ записать в виде
$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ и найти $|\sin z|$

Задача **2**.

Найти такие z, что

$$1) \operatorname{Re} \sin z = 0, \qquad 2) I \sin z = 0.$$

Задача **3**.

Функцию $\operatorname{tg} z$ записать в виде $\operatorname{tg}(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ и найти $|\operatorname{tg} z|$.

Задача **4**.

Показать, что $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ и $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$.

Задача **5**.

Вычислить $\ln 1$ и $\ln(-1)$.

Задача **6**.

Вычислить 1^{-i}.