



Комплексный анализ

Дифференцирование функции комплексного переменного

Никита Александрович Евсеев

Физический факультет Новосибирского государственного университета

Китайско-российский институт Хэйлунцзянского университета

7 Марта 2016

Производная

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$1. (f(z) + g(z))' =$$

$$2. (f(z)g(z))' =$$

$$3. \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' =$$

$$4. (f \circ g)'(z) =$$

$$1. (f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$$

$$2. (f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$3. \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

$$4. (f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$$

Дифференцируемость \Rightarrow Непрерывность

Пусть $G, H \subset \mathbb{C}$ — открытые множества, $w_0 \in H$,
 $f : G \rightarrow H$ — взаимно однозначная функция
(биекция) и $g = f^{-1}$. Если f дифференцируема в
точке $g(w_0)$, $f'(g(w_0)) \neq 0$ и g — непрерывна в w_0 , то
 g дифференцируема в w_0 и

Пусть $G, H \subset \mathbb{C}$ — открытые множества, $w_0 \in H$,
 $f : G \rightarrow H$ — взаимно однозначная функция
(биекция) и $g = f^{-1}$. Если f дифференцируема в
точке $g(w_0)$, $f'(g(w_0)) \neq 0$ и g — непрерывна в w_0 , то
 g дифференцируема в w_0 и

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(g(w_0))}.$$

1) Пусть f — дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда частные производные удовлетворяют условию

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \quad (1)$$

2) Пусть f — комплексная функция и её частные производные f_x и f_y существуют в окрестности z_0 и непрерывны в z_0 . Если частные производные удовлетворяют условию 1, то f дифференцируема в точке z_0 .

В обоих случаях 1) и 2) производную можно записать в виде

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$

Условия Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (CR)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (CR)$$

Если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ достаточно *хорошие* (дифференцируемые), то

$$\exists f'(z) \quad \Leftrightarrow \quad (CR)$$

Пример 1.

Проверить условия Коши—Римана (CR) для функции $f(z) = e^z$

Пример 1.

Проверить условия Коши—Римана (CR) для функции $f(z) = e^z$

Решение:

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

Примеры

Пример 1.

Проверить условия Коши—Римана (CR) для функции $f(z) = e^z$

Решение:

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

Пример 2.

Проверить условия Коши—Римана (CR) для функции $f(z) = \bar{z}$

Пример 1.

Проверить условия Коши—Римана (CR) для функции $f(z) = e^z$

Решение:

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

Пример 2.

Проверить условия Коши—Римана (CR) для функции $f(z) = \bar{z}$

Решение:

Условия (CR) не выполнены $\Rightarrow f(z) = \bar{z}$ не дифференцируема.

Пример 3.

Является ли функция $f(z) = z^3$ дифференцируемой?

Пример 3.

Является ли функция $f(z) = z^3$ дифференцируемой?

Ответ:

Да, является

Таблица производных

1. $(z^n)' =$

2. $(e^z)' =$

3. $(\sin z)' =$

4. $(\cos z)' =$

5. $(\operatorname{sh} z)' =$

6. $(\operatorname{ch} z)' =$

7. $(\operatorname{Ln} z)' =$

8. $(\operatorname{Arcsin} z)' =$

9. $(\operatorname{Arccos} z)' =$

10. $(\operatorname{Arsh} z)' =$

Таблица производных

$$1. (z^n)' = nz^{n-1},$$

$$3. (\sin z)' = \cos z$$

$$5. (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$$

$$7. (\operatorname{Ln} z)' = 1/z$$

$$9. (\operatorname{Arccos} z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$2. (e^z)' = e^z$$

$$4. (\cos z)' = -\sin z$$

$$6. (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$$

$$8. (\operatorname{Arcsin} z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$10. (\operatorname{Arsh} z)' = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

Пример 4.

Найти производную от функции

$$\sin e^z$$

Пример 5.

Найти производную от функции

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + 2z}$$

Пример 6.

Найти числа a, b при которых функция

$$f(z) = x + ay + i(bx + y)$$

будет дифференцируемой.

Пример 6.

Найти числа a, b при которых функция

$$f(z) = x + ay + i(bx + y)$$

будет дифференцируемой.

Ответ: $a = -b$

Пример 6.

Найти числа a, b при которых функция

$$f(z) = x + ay + i(bx + y)$$

будет дифференцируемой.

$$\text{Ответ: } a = -b$$

Пример 7.

Найти условия на числа a, b, c, d при которых функция

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

будет дифференцируемой.

Гармоническая функция

Функция $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

называется гармонической.

Полярные координаты

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$\Leftrightarrow z = \rho e^{i\varphi}$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

ρ — полярный радиус ($\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$)

φ — полярный угол

(например, если $x > 0$ и $y > 0$, то $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$).

Условия Коши—Римана (CR) в полярных координатах

В полярных координатах

$$f(z) = r(x, y) \cos \theta(x, y) + ir(x, y) \sin \theta(x, y)$$

Условия Коши—Римана (CR) в полярных координатах

В полярных координатах

$$f(z) = r(x, y) \cos \theta(x, y) + ir(x, y) \sin \theta(x, y)$$

Условия Коши—Римана (CR) в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial r}{\partial x} = r \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -r \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Задача 1.

Показать по определению, что $\lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b$.

Задача 2.

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$$

Задача 3.

$$\lim_{z \rightarrow 1-i} (x + i(2x + y))$$

Задача 4.

Проверить условия Коши—Римана (CR) для функций

$$1) \cos z, \quad 2) \operatorname{Ln} z, \quad 3) \operatorname{sh} z, \quad 4) \operatorname{ch} z$$

Задача 5.

Найти числа a , b и c при которых функция

$$f(z) = x + ay + i(bx + cy)$$

будет дифференцируемой.

Задача 6.

Найти числа a, b при которых функция

$$f(z) = \cos x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \sin x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$$

будет дифференцируемой.

Задача 7.

Является ли функция

$$f(z) = e^{x^2} + i2x(1 + ye^{x^2})$$

дифференцируемой?