



Комплексный анализ

Комплексное интегрирование

Никита Александрович Евсеев

Физический факультет Новосибирского государственного университета

Китайско-российский институт Хэйлунцзянского университета

8 Марта 2016

Определение

Интеграл от непрерывной функции $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ вдоль кривой γ определяется равенством

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

$$1. \int_{\Gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z) dz + \beta \int_{\Gamma} g(z) dz$$

$$2. \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

$$3. \int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz$$

Пример

Пусть $f(z) = \bar{z}^2$, вычислить интеграл

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

Если

- 1) γ — отрезок соединяющий 0 и $1 + i$;
- 2) γ — дуга параболы между 0 и $1 + i$;
- 3) γ — ломаная $0 \rightarrow 1 \rightarrow 1 + i$

Пример

Пусть Γ — единичная окружность $|z| = 1$. Вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma} e^z dz =$$

\oint — интеграл по замкнутой кривой (по замкнутому контуру)

Пример

Вычислим интеграл

$$I_n = \int_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n dz,$$

считая, что n — целое число, а окружность ориентирована против хода часовой стрелки.

Длина кривой

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Пример

Найти длину кривой $l(\gamma)$, если

- 1) γ — отрезок соединяющий 0 и $1 + i$;
- 2) γ — окружность $|z| = 1$;
- 3) γ — дуга параболы между 0 и $1 + i$;

Оценка интеграла

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot l(\gamma)$$

Напоминание: Формула Грина

设闭区域 D 由分段光滑的简单曲线 L 围成, 函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L^+} (P dx + Q dy)$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线。格林公式还可以用来计算平面图形的面积。

此公式叫做**格林公式**, 它给出了沿着闭曲线 c 的**曲线积分**与 c 所包围的区域 D 上的二重积分之间的关系。另见**格林第一公式**、**格林第二公式**。

Если $f(z)$ — голоморфная в \mathbb{C} функция, то

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

для любой замкнутой кривой γ !

Интеграл от аналитической (дифференцируемой) функции определяется только начальной z_0 и конечной z_1 точками пути (контура, линии) интегрирования γ

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$$

Пример 1.

Вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma} e^z dz$$

Γ — единичная окружность ($|z| = 1$).

Пример 1.

Вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma} e^z dz$$

Γ — единичная окружность ($|z| = 1$).

Пример 2.

Пусть кривая Γ ограничивает область $D \subset \mathbb{C}$, имеющую площадь S . Доказать равенства, считая, что Γ проходимся в положительном направлении:

$$1. \quad \int_{\Gamma} \operatorname{Re} z dz = iS. \quad 2. \quad \int_{\Gamma} \operatorname{Im} z dz = -S.$$

Пример 3.

Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx$$

Интегральная формула Коши

Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в конечносвязной ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ и имеет в ней непрерывные частные производные, и пусть кривая γ является границей области D , снабжённой положительной ориентацией. Тогда для любой точки z_0 , лежащей внутри контура γ , справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

Задача 1.

Вычислить интегралы

$$I_1 = \int_{\gamma} \operatorname{Re} z \, dz \quad \text{и} \quad I_2 = \int_{\gamma} \operatorname{Im} z \, dz$$

по каждой из следующих кривых γ :

- а) по отрезку прямой от точки $z = 0$ до точки $z = 2 + i$;
- б) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$, от точки $z = 1$ до точки $z = -1$;
- в) по окружности $|z - z_0| = r$ (направление обхода — против часовой стрелки).

Задача 2.

Пусть кривая Γ ограничивает область $D \subset \mathbb{C}$, имеющую площадь S . Доказать равенство, считая, что Γ проходимся в положительном направлении:

$$\int_{\Gamma} z^* dz = 2iS.$$

Задача 3.

Вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz$$

Γ — единичная окружность.

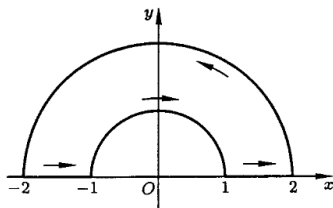
Задача 4.

Вычислить интеграл $\int_{\gamma} |z| \bar{z} dz$, где γ – простой замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z| = 1$ и отрезка $[-1, 1]$.

Задача 5.

Вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz$$



Задача 6.

Вычислить интеграл

$$\int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz.$$

Задача 7.

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2 + a^2},$$

где γ — простой замкнутый контур, содержащий внутри себя
круг $|z| \leq a$.