Комплексный анализ

Интегральная теорема Коши

Никита Александрович Евсеев

Физический факультет Новосибирского государственного университета

Китайско-российский институт Хэйлунцзянского университета

9 Марта 2015

Напоминание: Формула Грина

设闭区域D由分段光滑的**简单曲线** L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{L^+} (Pdx + Qdy)$$

其中L是D的取正向的边界曲线。格林公式还可以用来计算平面图形的面积。

此公式叫做**格林公式**，它给出了沿着闭曲线C的曲线积分与C所包围的区域D上的二重积分之间的关系。另见格林第一公式、格林第二公式。

Если $f(z)$ — голоморфная в $\mathbb{C}$ функция, то

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

для любой замкнутой кривой γ!

Интеграл от аналитической (дифференцируемой) функции определяется только начальной z_0 и конечной z_1 точками пути (контура, линии) интегрирования γ

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$$

Пример 1.

Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} e^z \, dz$$

Γ — единичная окружность ($|z| = 1$).

Пример 1.

Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} e^{z}\,dz$$

Γ — единичная окружность ($|z| = 1$).

Пример 2.

Пусть кривая Γ ограничивает область $D \subset \mathbb{C}$, имеющую площадь S. Доказать равенства, считая, что Γ проходится в положительном направлении:

1. $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Re} z\,dz = iS.$ **2**. $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Im} z\,dz = -S.$

Пример 3.

Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx$$

Интегральная формула Коши

Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в конечносвязной ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ и имеет в ней непрерывные частные производные, и пусть кривая γ является границей области D, снабжённой положительной ориентацией. Тогда для любой точки z_0, лежащей внутри контура γ, справделива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

Задача 1.

Вычислить интегралы

$$I_1 = \int_\gamma \operatorname{Re} z\, dz \qquad \text{и} \qquad I_2 = \int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz$$

по каждой из следующих кривых γ:

а) по отрезку прямой от точки $z = 0$ до точки $z = 2 + i$;

б) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, от точки $z = 1$ до точки $z = -1$;

в) по окружности $|z - z_0| = r$ (направление обхода — против часовой стрелки).

Задача **2**.

Пусть кривая Γ ограничивает область $D \subset \mathbb{C}$, имеющую площадь S. Доказать равенство, считая, что Γ проходится в положительном направлении:

$$\int\limits_{\Gamma} z^* \, dz = 2iS.$$

Задача **3**.

Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{1}{z} \, dz$$

Γ — единичная окружность.

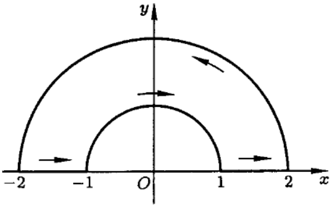
Задача **4**.

Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} |z|\,\overline{z}\,d\,z$, где γ– простой замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z| = 1$ и отрезка $[-1, 1]$.

Задача **5**.

Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{z}{\overline{z}}\, dz$$



Задача **6**.

Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz.$$

Задача **7**.

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^z\,d\,z}{z^2+a^2},$$

где γ — простой замкнутый контур, содержащий внутри себя круг $|z| \leqslant a$.