Комплексный анализ

Теория интеграла Коши - 2

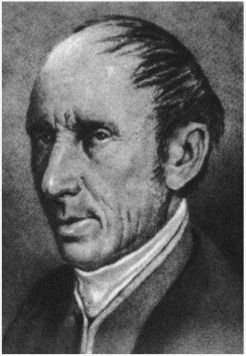
Никита Александрович Евсеев

Физический факультет Новосибирского государственного университета

Китайско-российский институт Хэйлунцзянского университета

10 Марта 2016

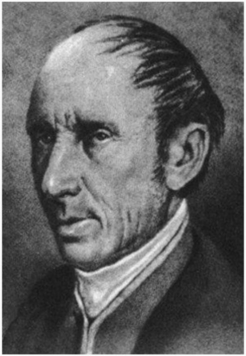
奥古斯丁·路易·柯西



出生 1789年8月21日
法國巴黎

逝世 1857年5月23日
法國索鎮
Sceaux (Hauts-de-Seine)

奧古斯丁·路易·柯西



出生	1789年8月21日 法國巴黎
逝世	1857年5月23日 法國索鎮 Sceaux (Hauts-de-Seine)

$$\lim \qquad \frac{d}{dx}$$

$$\int dx$$

$$\delta x \qquad \sum_{1}^{\infty}$$

$\varepsilon - \delta$-определения

$\dots$

Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в конечносвязной ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ и имеет в ней непрерывные частные производные, и пусть кривая γ является границей области D, снабжённой положительной ориентацией. Тогда для любой точки z_0, лежащей внутри контура γ, справделива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

Пусть функция Γ — кривая, $f(t)$ — функция заданная на Γ. Определим функцию

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

Свойства

$\exists F'(z)$, и

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt$$

Свойства

$\exists F'(z)$, и

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt$$

Более того, $\exists F^{(n)}(z)$ для любого n, и

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

Интегральное представление

Если $f(z)$ — дифференцируемая функция, то

1. $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z|=\delta} \frac{f(t)}{(t-z)}\, dt$$

Если $f(z)$ — дифференцируемая функция, то

1. $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t-z|=\delta} \frac{f(t)}{(t-z)}\, dt$$

2. $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|t-z|=\delta} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt$$

Теорема Мореры

Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и вдоль любого замкнутого контура $\gamma \subset D$

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,d\,z = 0,$$

то функция $f(z)$ является дифференцируемой в области D.

Теорема. Принцип максимума модуля аналитической функции

Пусть $D \subset \mathbb{C}$– область, отличная от постоянной функция f является аналитической в области D и $M = \sup\limits_{z \in D} |f(z)|$. Тогда $|f(z)| < M$ для произвольной точки $z \in D$. Иными словами, модуль отличной от постоянной аналитической функции не может достигать своего максимума ни в одной внутренней точке области.

Пример 1.

Найти максимум $|e^z|$ на замкнутом единичном круге $|z| \leqslant 1$.

Пример 1.

Найти максимум $|e^z|$ на замкнутом единичном круге $|z| \leqslant 1$.

$$\max_{|z|\leqslant 1} = e$$

Пример 1.

Найти максимум $|e^z|$ на замкнутом единичном круге $|z| \leqslant 1$.

$$\max_{|z| \leqslant 1} = e$$

Пример 2.

Найти максимум $|\cos z|$ на замкнутом единичном круге $|z| \leqslant 1$.

Пример 3.

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$$

точка 0 находится внутри, а 1 вне контура Γ

Пример 3.

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$$

точка 0 находится внутри, а 1 вне контура Γ

Пример 4.

Вычислить интеграл

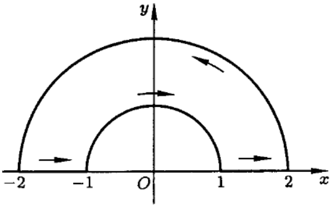
$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{ze^z\,dz}{(z-a)^3}$$

точка a находится внутри контура Γ

Задача 1.

Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{z}{\overline{z}}\, dz$$



Задача 2.

Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, если известно, что $v(x, y) = y \cos y \operatorname{ch} x + x \sin y \operatorname{sh} x$ и $f(0) = 0$.

Задача 3.

Найти аналитическую функцию $f(z)$, если

$$\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Задача **4**.

Найти максимум $|\cos z|$ на замкнутом единичном круге $|z| \leqslant 1$.

Задача **5**.

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z \, dz}{z(1-z)^3}$$

точка 1 находится внутри, а 0 вне контура Γ

Задача **6**.

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$$

точки 0 и 1 находится внутри контура Γ