Комплексный анализ

Ряд Тейлора

Никита Александрович Евсеев

Физический факультет Новосибирского государственного университета

Китайско-российский институт Хэйлунцзянского университета

11 Марта 2016

Ряд Тейлора

定义 [编辑]

在数学上，一个在实数或复数*a*邻域上的无穷可微实变函数或複變函数*f*(*x*)的**泰勒级数**是如下的

数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

这裡，*n*! 表示*n*的阶乘而$f^{(n)}(a)$表示函数*f*在点*a*处的*n*阶导数。如果泰勒级数对于区间（*a*-*r*, *a*

f(*x*)，那么我们就称函数*f*(*x*)为**解析的**（analytic）。当且仅当一个函数可以表示成为幂级数的

否收敛于*f*(*x*)，我们通常采用**泰勒定理**估计级数的餘项。上面给出的幂级数展开式中的系数正

如果*a* = 0，那么这个级数也可以被称为**麦克劳伦级数**。

Теорема Тейлора

Если $f(z)$ — дифференцируемая функция в области D и $z_0 \in D$, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Теорема Тейлора

Если $f(z)$ — дифференцируемая функция в области D и $z_0 \in D$, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{или} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}}$$

Пример 1.

Разложить функцию $\dfrac{1}{az+b}$ в ряд Тейлора с центром в нуле, если $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$.

Пример 1.

Разложить функцию $\dfrac{1}{az+b}$ в ряд Тейлора с центром в нуле, если $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$.

Опираясь на разложение $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n,$ справедливое при $|z| < 1,$ доказать формулы:

а) $$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, z^n \qquad (|z| < 1);$$

б) $$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, (n+1)\, z^{2n} \qquad (|z| < 1);$$

Свойство

Радиус сходимости ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей точки, где $f(z)$ не аналитична.

Пример 2.

Найти радиус сходимости ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

для функции

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)(z-(3+2i))}$$

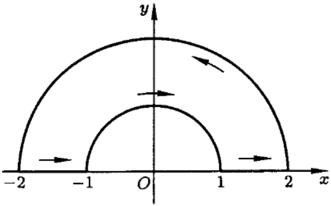
Внутренняя теорема единственности

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, множество $E \subset D$ и имеет предельную точку $z_0 \in D$, функции $f(z)$ и $g(z)$ являются аналитическими в области D и $f(z) = g(z)$ для всех $z \in E$. Тогда $f(z) = g(z)$ всюду в области D.

Задача 1.

Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{z}{\overline{z}}\, dz$$



Задача 2.

Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, если известно, что $v(x, y) = y \cos y \operatorname{ch} x + x \sin y \operatorname{sh} x$ и $f(0) = 0$.

Задача 3.

Найти аналитическую функцию $f(z)$, если

$$\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Задача **4**.

Найти максимум $|\cos z|$ на замкнутом единичном круге $|z| \leqslant 1$.

Задача **5**.

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$$

точка 1 находится внутри, а 0 вне контура Γ

Задача **6**.

Вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$$

точки 0 и 1 находится внутри контура Γ

Задача **7**.

Доказать формулу

$$\frac{z^2}{(1+z)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \,(n-1)\, z^n \qquad (|z| < 1)$$

Задача **8**.

Разложить функцию $f(z) = \sin^2 z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

Задача **9**.

Разложить функцию $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ и найти радиус сходимости.

Задача **10**.

Разложить функцию $f(z) = \int\limits_0^z e^{t^2}\,dt$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ и найти радиус сходимости.