



Комплексный анализ

Ряд Фурье

Никита Александрович Евсеев

Физический факультет Новосибирского государственного университета

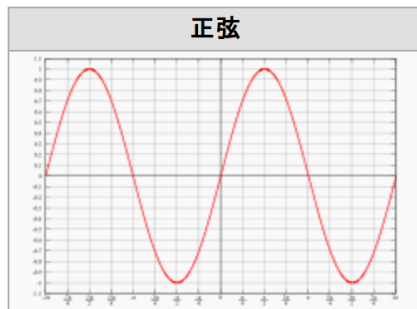
Китайско-российский институт Хэйлунцзянского университета

21 Марта 2016

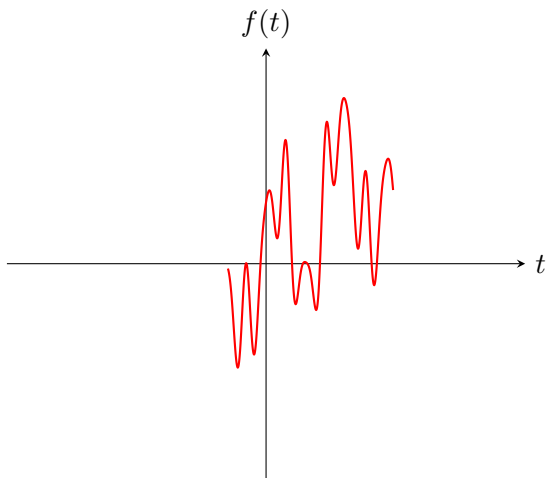
Определение

Функция $f(t)$ называется **периодической**, если найдётся такое число T , $T \neq 0$, что

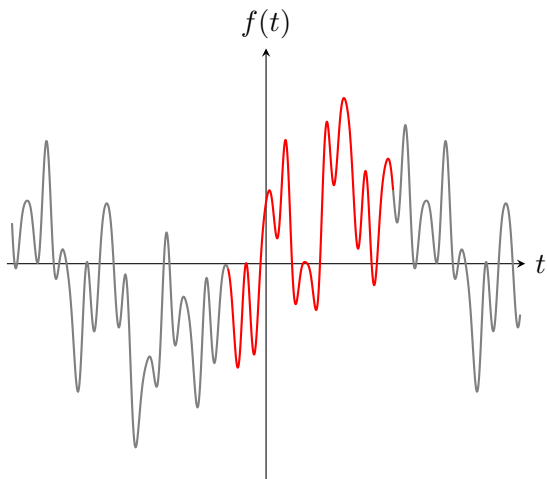
$$f(t + T) = f(t), \quad \text{для всех } t.$$



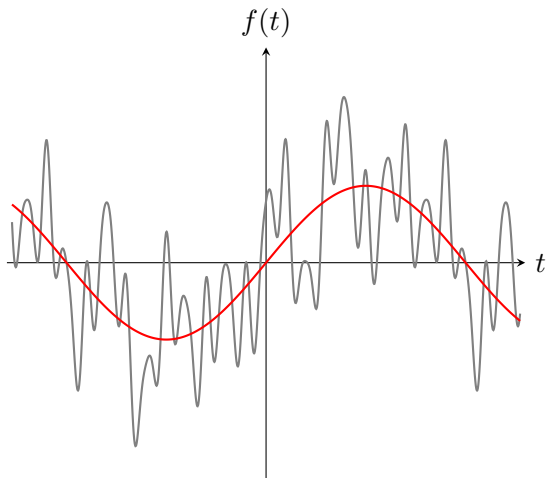
Пример



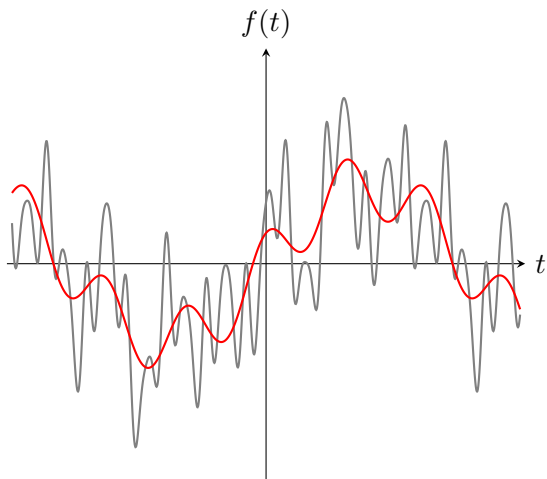
Пример: $f(t)$



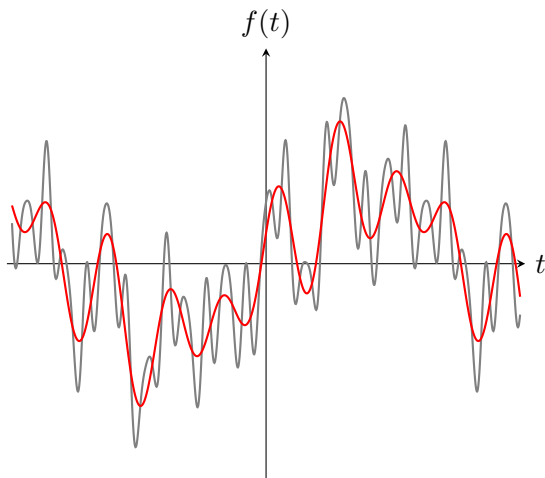
$$f(t) \sim 0.5 \sin t$$



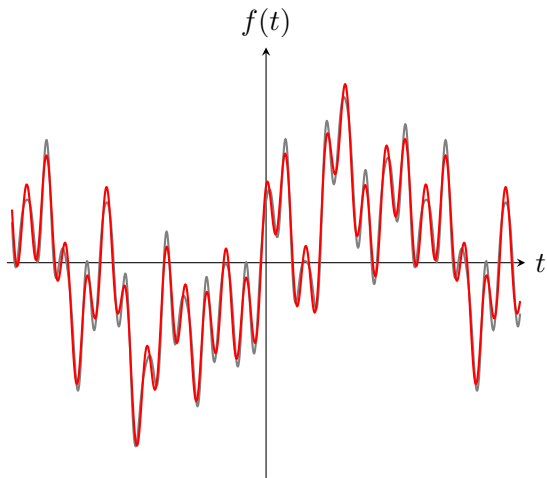
$$f(t) \sim 0.5 \sin t + 0.2 \cos 5t$$



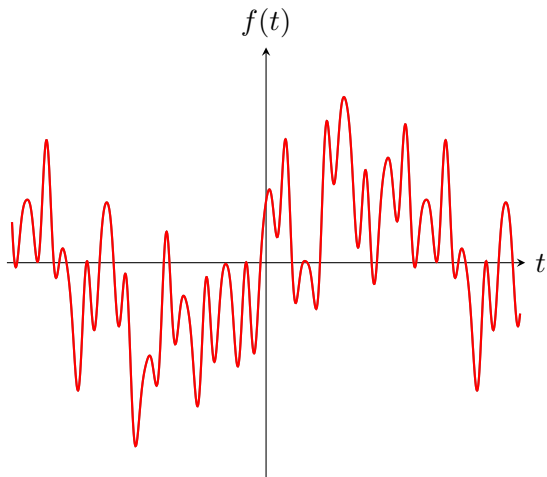
$$f(t) \sim 0.5 \sin t + 0.2 \cos 5t + 0.3 \sin 7t$$



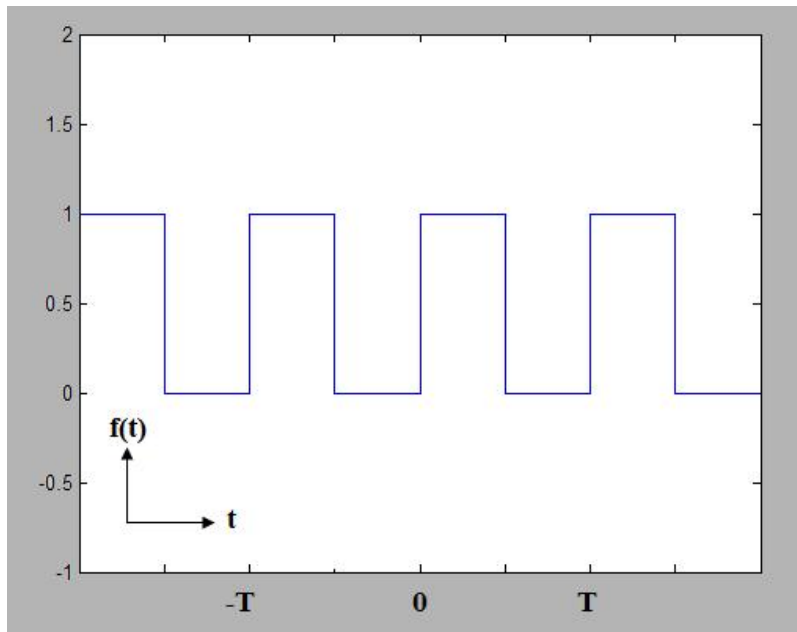
$$f(t) \sim 0.5 \sin t + 0.2 \cos 5t + 0.3 \sin 7t + 0.3 \cos 20t$$



$$f(t) \sim 0.5 \sin t + 0.2 \cos 5t + 0.3 \sin 7t + 0.3 \cos 20t - 0.1 \cos 30t$$

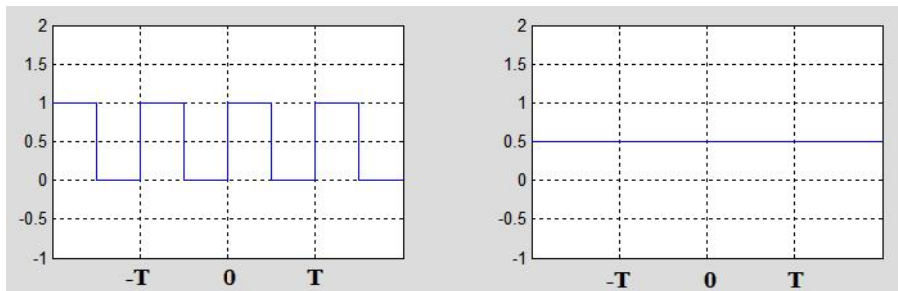


Пример: Прямоугольный импульс



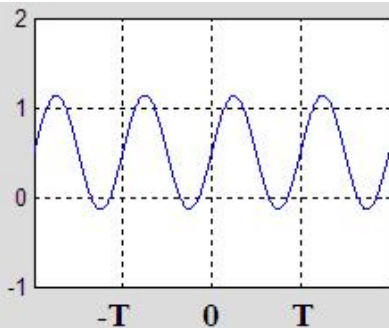
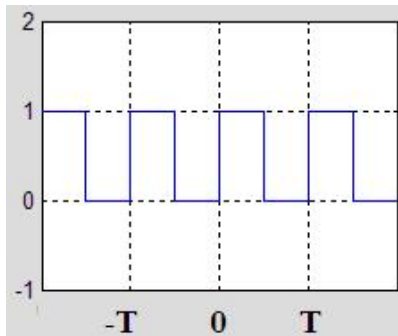
Прямоугольный импульс : Первое приближение

$$f(t) \sim a_0$$



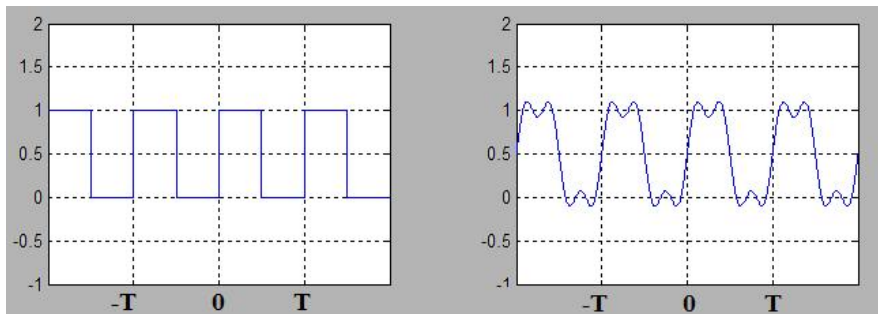
Прямоугольный импульс : Два члена разложения

$$f(t) \sim a_0 + b_1 \sin t$$



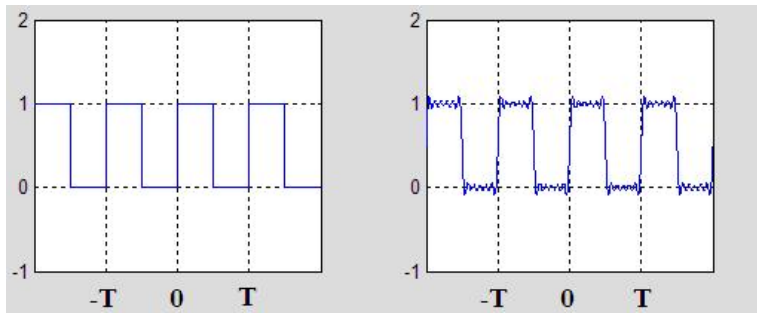
Прямоугольный импульс : a_0, b_1, b_3

$$f(t) \sim a_0 + b_1 \sin t + b_3 \sin 3t$$



Прямоугольный импульс : $a_0, b_1, b_3, b_5, b_7, b_9$

$$f(t) \sim a_0 + b_1 \sin t + b_3 \sin 3t + b_5 \sin 5t + b_7 \sin 7t + b_9 \sin 9t$$



Ряд Фурье

Ряд Фурье 2π -периодической функции:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Задачи

Нарисовать графики и найти ряды Фурье следующих функций, предполагая, что они имеют период 2π :

$$1. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -\pi < x < -\pi/2, \\ 0, & \text{если } -\pi/2 < x < \pi/2, \\ 1, & \text{если } \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

$$3. f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi).$$

$$4. f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi).$$

$$5. f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi).$$