



Комплексный анализ

Ряд Фурье - 2

Никита Александрович Евсеев

Физический факультет Новосибирского государственного университета

Китайско-российский институт Хэйлунцзянского университета

22 Марта 2016

Напоминание: **Ряд Фурье**

Ряд Фурье 2π -периодической функции:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Напоминание: Ряды Фурье в комплексной форме

Ряд Фурье в комплексной форме 2π -периодической функции:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

Ряды Фурье функции с произвольным периодом

Если функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ имеет период $2L$, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{\pi n t}{L} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{\pi n t}{L} dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Задачи

Нарисовать графики и найти ряды Фурье следующих функций, считая что они периодичны в периодом $2L$:

$$1. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{если } 1 < x < 3; \end{cases} \quad 2L = 4.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{если } 1 < x < 2, \\ 3 - x, & \text{если } 2 < x < 3; \end{cases} \quad 2L = 3.$$

Задачи

Найти ряды Фурье в комплексной форме следующих функций, если $|a| < 1$:

$$3. f(x) = \frac{1 - a \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2}.$$

$$4. f(x) = \frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2}.$$

$$5. f(x) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2}.$$

6. Доказать, что 2π -периодическая функция f вещественнозначна (т.е. $f(x) \in \mathbb{R}$), если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье удовлетворяют соотношениям $\overline{c_n} = c_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Задачи

6. Доказать, что 2π -периодическая функция f вещественнозначна (т.е. $f(x) \in \mathbb{R}$), если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье удовлетворяют соотношениям $\overline{c_n} = c_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
7. Доказать, что 2π -периодическая функция f является чётной (т.е. удовлетворяет соотношению $f(-x) = f(x)$), если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье удовлетворяют соотношениям $c_n = c_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

6. Доказать, что 2π -периодическая функция f вещественнозначна (т.е. $f(x) \in \mathbb{R}$), если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье удовлетворяют соотношениям $\overline{c_n} = c_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
7. Доказать, что 2π -периодическая функция f является чётной (т.е. удовлетворяет соотношению $f(-x) = f(x)$), если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье удовлетворяют соотношениям $c_n = c_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
8. Доказать, что 2π -периодическая функция f является нечётной (т.е. удовлетворяет соотношению $f(-x) = -f(x)$), если и только если коэффициенты c_n её комплексного ряда Фурье удовлетворяют соотношениям $c_n = -c_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ряды Фурье: Разложение только по синусам

Если функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — нечётная, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ряды Фурье: Разложение только по косинусам

Если функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — чётная, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Задачи

9. Разложить функцию, заданную на интервале $(0, \pi)$ формулой $f(x) = \cos x$, в ряд Фурье по синусам.
10. Разложить функцию, заданную на интервале $(0, \pi)$ формулой $f(x) = \sin x$, в ряд Фурье по косинусам.
11. Разложить функцию, заданную на интервале $(0, \pi)$ формулой $f(x) = x \sin x$, в ряд Фурье по синусам.