## *Комплексный анализ*

# Ряд Фурье - 3

**Никита Александрович Евсеев**

Физический факультет Новосибирского государственного университета

Китайско-российский институт Хэйлунцзянского университета

23 Марта 2016

# Напоминание: Ряд Фурье

Ряд Фурье $2\pi$-периодической функции:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

## Напоминание: Ряды Фурье в комплексной форме

Ряд Фурье в комплексной форме $2\pi$-периодической функции:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

# Напоминание: Ряды Фурье функции с произвольным периодом

Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ имеет период $2L$, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \cos \frac{\pi n x}{L} \right),$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{\pi n t}{L}\, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int\limits_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{\pi n t}{L}\, dt, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

# Равенство Ляпунова

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx =$$

# Равенство Ляпунова

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

**1.** Написать равенство Ляпунова для $2\pi$-периодической функции $f(x)$, заданной на интервале $(-\pi,\pi)$ формулой

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } |x|<\alpha,\\ 0, & \text{если } \alpha<|x|<\pi.\end{cases}$$

**2.** Используя результат предыдущей задачи, найти суммы следующих числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

**3.** Используя равенство Ляпунова и считая равенство

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$$

известным, найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

**4.** Написать равенство Ляпунова для $2\pi$-периодических функций $f(x) = \cos \alpha x$ и $g(x) = \sin \alpha x$, заданных этими формулами на интервале $(-\pi, \pi)$.

**5.** Пусть $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = 0.$$

Доказать, что имеет место неравенство

$$\int_0^\pi [f(x)]^2\,dx \leqslant \int_0^\pi [f'(x)]^2\,dx$$

и убедиться, что знак равенства имеет место только для функций вида $f(x) = A\cos x$.
Это неравенство называется неравенством Стеклова.

# Равенство Ляпунова в комплексной форме

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$