

Контрольная работа № 1 (март 2018)

Комплексный анализ.

Комплексные числа, Последовательности, Ряды, Функции, Производная

Задача 1. (4 points)

Найти $\operatorname{Im} z$, если известно, что $|z| = |z - 3i|$.

$\operatorname{Im} z =$

Ответ:

$$\operatorname{Im} z = 3/2.$$

Задача 2. (2 points)

Вычислить $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9 =$

Ответ:

$$-1.$$

Задача 3. (3 points)

Вычислить $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2017} =$

Ответ:

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 4. (4 points)

Вычислить: а) $u = (1 + i\sqrt{3})^{13} + (1 - i\sqrt{3})^{13}$; б) $v = \frac{(1+i\sqrt{3})^{13} - (1-i\sqrt{3})^{13}}{i}$.

а) $u =$

б) $v =$

Ответ:

$$\text{а) } u = 2^{13}; \text{ б) } v = 2^{13}\sqrt{3}.$$

Задача 5. (2 points)

Вычислить $S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k$.

$S =$

Ответ:

$$S = \frac{1}{5}.$$

Задача 6. (5 points)

Вычислить $S_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k} z^k$.

$$S_n =$$

Ответ:

$$S_n = z \cdot \frac{1-(z/2)^n}{2-z} \text{ если } z \neq 2, s_n = n, \text{ если } z = 2.$$

Задача 7. (4 points)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^2}$ сходится или не сходится?

Ответ:

сходится.

Задача 8. (6 points)

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ сходится или не сходится?

Ответ:

не сходится.

Задача 9. (8 points)

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ сходится или не сходится?

Ответ:

сходится (Телескопический признак)

Задача 10. (3 points)

Пусть $f(z) = e^{e^z}$, найти $f(1 + i\pi/2)$.

Ответ:

$$f(i) = \cos e + i \sin e.$$

Задача 11. (3 points)

Вычислить $\cos(i \ln(2)) =$

Ответ:

$$\cos(i \ln(2)) = 5/4$$

Задача 12. (2 points)

Пусть $f(z) = \operatorname{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Вычислить

$$f'(0) =$$

Ответ:

$$f'(0) = 1$$