

КОНТРОЛЬНАЯ № 3 (МАРТ 2018)

Комплексный анализ

Ряд Лорана, Особые точки, Вычеты, Интегралы, Свёртка

Задача 1. (3 points)

Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ в ряд Лорана в с центром $z_0 = 0$.

Ответ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Задача 2. (4 points)

Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z-i}$ в ряд Лорана в кольце $|z| > 1$ ($z_0 = \infty$).

Ответ:

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \frac{1}{z^n}$$

Задача 3. (2 points)

Найти особые точки функции $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$.

Ответ:

0 - полюс 2. ∞ - существенно особая

Задача 4. (2 points)

Найти вычет

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^2 - z^3} =$$

Ответ:

2.

Задача 5. (3 points)

Найти вычет

$$\operatorname{Res}_{z=0} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) =$$

Ответ:

$-1/6$

Задача 6. (4 points)

Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz =$$

Ответ:

0.

Задача 7. (5 points)

Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx =$$

Ответ:

$\pi/4$.

Задача 8. (6 points)

Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cos(n\varphi - \sin \varphi) d\varphi =$$

$n \in \mathbb{N}$.

Ответ:

$\frac{2\pi}{n!}$.

Задача 9. (3 points)

Пусть $f(x) = xH(x)$, $g(x) = x^6H(x)$. Найти свёртку

$$(f * g)(x) =$$

Ответ:

$$\int_0^x t(x-t)^6 dx = x^8/56.$$

Задача 10. (5 points)

Пусть $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b_1} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2b_1^2}}$ и $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b_2} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2b_2^2}}$ Найти свёртку

$$(f * g)(x) =$$

Ответ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}b} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}, \quad a = a_1 + a_2, \quad b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$