

ЭКЗАМЕН (2 АПРЕЛЯ 2018)

Комплексный анализ

Задача 1. (1 point)

Вычислить

$$i^{2018} =$$

Ответ:

$$-1$$

Задача 2. (2 points)

Записать в тригонометрической форме $-2\sqrt{3} + 2i = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$\rho =$$

$$\varphi =$$

Ответ:

$$\rho = 4, \varphi = 5\pi/6.$$

Задача 3. (4 points)

Пусть $z = -3 + 3i$ и $w = 2e^{-i\pi/2}$. Выбрать верные равенства

- ☐ $\frac{z}{w} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i;$
- ☐ $\frac{w}{z} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i;$
- ☐ $z \cdot w = 6\sqrt{2}e^{i\pi/4};$
- ☐ $\frac{w}{z} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\pi/4}.$

Ответ:

2,3

Задача 4. (4 points)

Выбрать верные равенства

- ☐ $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta;$
- ☐ $(2(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}))^8 = 128 + 128\sqrt{3}i;$
- ☐ $(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8})^8 = -1;$
- ☐ $(1 + i)^{10} = 32i.$

Ответ:

3,4

Задача 5. (2 points)

Вычислить значение функции

$$\sin(\pi/2 + i \ln 2) =$$

Ответ:

$\frac{5}{4}$

Задача 6. (4 points)

Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^k$, найти значение в точке $z = \frac{1}{2}$

$$f(1/2) =$$

Ответ:

2

Задача 7. (2 points)

Для функции $f(z) = \frac{e^z}{z^3(1 - \cos z)}$ точка $z = 0$ это полюс. Определить порядок полюса (m)

$$m =$$

Ответ:

$$m = 5$$

Задача 8. (2 points)

Найти вычет

$$\operatorname{Res}_{z=0} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) =$$

Ответ:

$$-1/6$$

Задача 9. (2 points)

Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-1|=1/2} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2} =$$

Ответ:

$$2\pi i$$

Задача 10. (3 points)

Пусть $t \in \mathbb{R}$, вычислить значение интеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\alpha z} dz}{z^2 + 1} =$$

Ответ:

$$2\pi i \sin \alpha$$

Задача 11. (2 points)

Вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z} =$$

Ответ:

$$2\pi i$$

Задача 12. (4 points)

Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx =$$

Ответ:

$$\pi/4$$

Задача 13. (4 points)

Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax} dx}{x^2 + b^2}$, где $a, b > 0$.

☐ 0; ☐ $\frac{\pi e^{-ab}}{b}$; ☐ $-\frac{\pi e^{-ab}}{b}$; ☐ $\frac{2\pi i e^{-ab}}{b}$.

Ответ:

$$\frac{\pi e^{-ab}}{b}.$$

Задача 14. (2 points)

Вычислить преобразование Лапласа

$$\mathcal{L}(t \cos t) =$$

Ответ:

$$F(p) = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Задача 15. (5 points)

Разложить в ряд Фурье $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi}{2} - x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

Ответ:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

Задача 16. (3 points)

Разложить в ряд Фурье $f(x) = \sin^2 x$

Ответ:

Задача 17. (5 points)

Вычислить $\int_{-\pi}^{\pi} |e^{2ix} + e^{4ix} + e^{6ix}|^2 dx$.

☐ 0; ☐ 6π ; ☐ -6π ; ☐ $6\pi i$.

Ответ:

$$6\pi.$$

Задача 18. (4 points)

Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\hat{f}(\xi) =$$

Ответ:

$$\pi e^{-|\xi|}$$