

### Определение характеристик атомов и молекул по кинематике парных столкновений

Классическое рассмотрение столкновения

### Опыт Резерфорда

Сечение  $\rightarrow d\sigma = \frac{dN(\chi)}{n}$  ← Кол-во рассеянных частиц

← Поток

Формула Резерфорда (кулоновский потенциал)  $\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_{\infty}^2}}}$

$U(r) = \frac{\alpha}{r}$

$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_{\infty}^2}\right)^2 \frac{d\omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}$

### Квантовомеханический подход

До столкновения  $\psi = e^{ikz}$

Импульс  $\vec{p} = \vec{k} / \hbar$

После столкновения (сферич. волна)  $\psi = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$

← Амплитуда рассеяния

### Сечение рассеяния

$$\psi = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$j = \frac{1}{2m} [\psi \hat{p}^* \psi^* + \psi^* \hat{p} \psi] = \frac{i\hbar}{2m} [\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi]$$

$$\vec{j}_{nao} = \frac{1}{2m} 2\hbar \vec{k} = \vec{v}$$

$$\vec{j}_{pac} = \frac{\hbar}{2mi} |f(\theta)|^2 \frac{1}{r^2} 2i\vec{k} = \vec{v} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2}$$

### Дифференциальное сечение рассеяния

$$j_{nao} d\sigma = j_{pac} dS$$

$$d\sigma = \frac{j_{pac}}{j_{nao}} dS = \frac{j_{pac}}{j_{nao}} r^2 d\omega$$

$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\omega$

## Борновское приближение

$$\psi = \psi_{\text{над}} + \psi_{\text{рас}} = e^{i\vec{k}\vec{r}} + \psi_{\text{рас}}$$

$$(\Delta + k^2)\psi_{\text{рас}} = \frac{2mU}{\hbar^2}\psi_{\text{над}}$$

$$\psi_{\text{рас}}(\vec{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U(\vec{r}') \psi_{\text{над}}(\vec{r}') \frac{e^{ik'|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$$

$r \gg r'$  – большие расстояния  $|\vec{r}-\vec{r}'| \approx r - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r}$

$$\psi_{\text{рас}}(\vec{r}) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik'r}}{r} \int U(\vec{r}') e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}'} d^3r'$$

$$d\sigma = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} \left| \int U(\vec{r}') e^{i\vec{q}\vec{r}'} d^3r' \right|^2 d\Omega$$

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k} \quad q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

## Условия применимости

$$\psi_{\text{рас}}(\vec{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U(\vec{r}') \psi_{\text{над}}(\vec{r}') \frac{e^{ik'|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$$

$ka \ll 1$  – медленные частицы

$$\psi_{\text{рас}} \approx \frac{m}{\hbar^2} |U| a^2 \Rightarrow |U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$$

$ka \gg 1$  – быстрые частицы

$$\psi_{\text{рас}} \approx \frac{m}{\hbar^2} \frac{|U|a}{k} \Rightarrow |U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} ka$$

## Другой способ получения формулы Борна

$$dw_{f_i} = \frac{2\pi}{\hbar} |U_{f_i}|^2 \delta(E_f - E_i) dV_f$$

$$dw_{f_i} = \frac{4\pi m}{\hbar} |U_{\vec{p}'\vec{p}}|^2 \delta(p'^2 - p^2) \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$d\sigma = \frac{mp}{4\pi^2\hbar^4} \left| \int (e^{i\vec{p}'\vec{r}/\hbar})^* U(\vec{r}) \left( \sqrt{\frac{m}{p}} e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar} \right) d^3r \right|^2 d\Omega'$$

## Центрально-симметричное возмущение

$$\int U(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3r = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(r) e^{iqr \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

$$\int U(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3r = 4\pi \int_0^\infty U(r) \frac{\sin qr}{q} r dr$$

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty U(r) \frac{\sin qr}{q} r dr$$

## Предельные случаи

$ka \ll 1$  – медленные частицы

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty U(r) r^2 dr$$

Рассеяние изотропно и не зависит от скорости

$ka \gg 1$  – быстрые частицы

Рассеяние резко анизотропно и направлено вперед в узком конусе с углом

$$\Delta\theta \sim 1/ka$$

### Рассеяние электрона на атоме

$$U(r) = -e \int \left( \frac{Z}{r} - \sum_{n=1}^Z \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \right) |\psi_a|^2 d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_n$$

Атом водорода

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

### Дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2 (2\lambda^2 + q^2)^2}{(\lambda^2 + q^2)^4}$$

здесь  $\lambda = 2/a_0$

Полное сечение

$$\sigma = 2\pi \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta = \frac{\pi a_0^2 (12 + 18k^2 a_0^2 + 7k^4 a_0^4)}{3(1 + k^2 a_0^2)^3}$$

### Предельные случаи

$ka_0 \ll 1$  – медленные электроны

$$\sigma \sim 4\pi a_0^2$$

$ka_0 \gg 1$  – быстрые электроны

$$\sigma \sim \frac{7\pi}{3} \frac{1}{k^2} = \frac{7\pi}{3} \frac{\hbar^2}{(m\nu)^2}$$

### Модельные потенциалы

#### Шары

$$U(r) = \begin{cases} \infty & \text{при } r < D_r \\ 0 & \text{при } r > D_r \end{cases}$$

#### Точечные центры

$$U(r) = \begin{cases} +a/r & \text{отталкивание} \\ -a/r & \text{притяжение} \end{cases}$$

### Модельные потенциалы

#### Потенциал Сазерленда

$$U(r) = \begin{cases} \infty & \text{при } r < D \\ -1/r^n & \text{при } r > D \end{cases}$$

#### Потенциал Ленарда-Джонса

$$U(r) = U_0 \left[ \left( \frac{D}{r} \right)^{12} - \left( \frac{D}{r} \right)^6 \right]$$

### Неупругое рассеяние

Атом переходит из основного состояния в возбужденное дискретное или непрерывное (ионизация)  $\nu_{эл} \gg \nu_{ат}$

Потенциал атома

$$U(r) = \frac{Ze^2}{r} - \sum_{a=1}^Z \frac{e^2}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}$$

Вероятность перехода

$$dW_n = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n, p' | U | 0, p \rangle|^2 \delta \left( E_n - E_0 - \frac{p^2 - p'^2}{2m} \right) \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}$$

Из  $\delta$ -функции  $\frac{p^2 - p'^2}{2m} = E_n - E_0$

Интегрируем по  $p'$  подставляем  $\Psi_{\text{пад}}$  и  $\Psi_{\text{рас}}$

$$d\sigma_n = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \frac{p'}{p} \left| \iint U e^{-i\vec{q}\vec{r}} \Psi_n^* \Psi_0 d\tau d^3r \right|^2 d\omega$$

$d\tau = d^3r_1 d^3r_2 \dots$  – Элемент конфигур.  
пр-ва атома

$$\int \frac{e^{-i\vec{q}\vec{r}}}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} d^3r = \frac{e^{-i\vec{q}\vec{r}_a}}{q^2} \int \frac{e^{-i\vec{q}\vec{R}}}{R} d^3R = \frac{4\pi}{q^2} e^{-i\vec{q}\vec{r}_a}$$

$$d\sigma_n = \left( \frac{me^2}{\hbar^2} \right) \frac{4k'}{kq^4} \left| \int \sum_a e^{-i\vec{q}\vec{r}_a} \Psi_n^* \Psi_0 d\tau \right|^2 d\omega$$

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \quad \vec{k}' = \frac{\vec{p}'}{\hbar}$$

$-\hbar\vec{q}$  – импульс, передаваемый атомному электрону

Сечение в зависимости от  $q$

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k} \Rightarrow q^2 = k'^2 + k^2 - 2k'k \cos \vartheta$$

$$q dq = kk' \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2\pi} kk' d\omega$$

$$\frac{d\sigma_{n1}}{dq} = 8\pi \left( \frac{e^2}{\hbar\nu} \right)^2 \frac{1}{q^3} \left| \int \sum_a e^{-i\vec{q}\vec{r}_a} \Psi_n^* \Psi_0 d\tau \right|^2$$

Диапазон изменения  $q$

Быстрые электроны

$$E_n - E_0 \ll E \quad \vartheta \ll 1 \quad k - k' \ll k$$

$$E_n - E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 - k'^2) \approx \frac{\hbar^2}{m} k(k - k') = \hbar\nu(k - k')$$

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k} \Rightarrow q^2 = k'^2 + k^2 - 2k'k \cos \vartheta$$

$$\vartheta \ll 1 \Rightarrow q^2 \approx (k - k')^2 + (k\vartheta)^2$$

$$q = \sqrt{\left( \frac{E_n - E_0}{\hbar\nu} \right)^2 + (k\vartheta)^2}$$

1.  $\vartheta \ll \frac{\nu_0}{\nu} \ll 1$

$$q = \frac{E_n - E_0}{\hbar\nu}$$

$$q = \sqrt{\left( \frac{E_n - E_0}{\hbar\nu} \right)^2 + (k\vartheta)^2}$$

2.  $\frac{\nu_0}{\nu} \ll \vartheta \ll 1$

$$q = k\vartheta = \frac{m\nu}{\hbar} \vartheta$$

не зависит  
от  $\Delta E$

$$q = \sqrt{\left(\frac{E_n - E_0}{\hbar\nu}\right)^2 + (k\mathcal{G})^2}$$

3.  $\mathcal{G} \sim \frac{v_0}{v}$

$$qa_0 \sim 1$$

Малые  $q$

$$qa_0 \ll 1 \quad \mathcal{G} \ll v_0/v$$

$$e^{-iqx} \sim 1 - iqx$$

$$\frac{d\sigma_{n1}}{dq} = 8\pi \left(\frac{e^2}{\hbar\nu}\right)^2 \frac{1}{q^3} \left| \int \sum_a e^{-iq\bar{r}_a} \psi_n^* \psi_0 d\tau \right|^2$$

$$\frac{d\sigma_{n1}}{dq} = 8\pi \left(\frac{e^2}{\hbar\nu}\right)^2 \frac{|x_{n0}|^2}{q}$$

Полное сечение при малых  $q$

$$\sigma_{n1} = 8\pi \left(\frac{e^2}{\hbar\nu}\right)^2 |x_{n0}|^2 \ln \frac{q_{\max}}{q_{\min}} \approx$$

$$\approx 8\pi \left(\frac{e^2}{\hbar\nu}\right)^2 |x_{n0}|^2 \ln \frac{\hbar\nu}{a_0(E_n - E_0)} \approx$$

$$\approx 4\pi \left(\frac{I}{E}\right) |x_{n0}|^2 \ln \left(\xi_n \frac{E}{I}\right)$$

Большие  $q$

$$qa_0 \ll 1 \quad e^{-iqx} \text{ быстро осциллирует}$$



$$\psi_n \propto e^{-iqx} \quad \text{ионизованный атом}$$

$$-\hbar q = p - p'$$

После столкновения скорости налетающего и атомного электрона сравнимы



Обменные эффекты

$$d\sigma = \pi Z e^4 \left[ \frac{1}{E_1^2} + \frac{1}{(E - E_1)^2} - \frac{1}{E_1(E - E_1)} \right] \frac{dE_1}{E}$$

$E$  - начальная энергия

$E_1$  - после соударения

Для столкновения позитрона с атомом  
(обменных эффектов нет)

$$d\sigma = \pi Z \frac{e^4}{E} \frac{dE_1}{E_1^2}$$

Неупругие столкновения тяжелых частиц

Ион массой  $M$ , зарядом  $Z_1$  и скоростью  $v \gg v_{ат}$

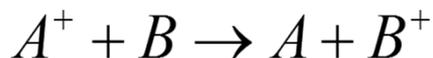
$$q = \sqrt{\left(\frac{E_n - E_0}{\hbar\nu}\right)^2 + \left(\frac{Mv\mathcal{G}}{\hbar}\right)^2}$$

$$\mathcal{G} \rightarrow \frac{M}{m} \mathcal{G}$$

$$\sigma_{n0}^i \approx Z_1^2 \frac{M}{m} \sigma_{n0}^e$$

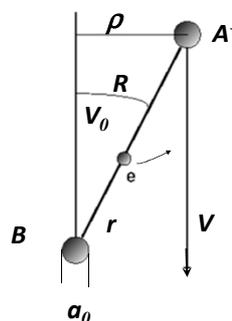
### Перезарядка

**Перезарядка** – обмен электроном (зарядом) при столкновении двух атомных частиц типа **A** и типа **B** (как правило, между ионом и атомом)



**Резонансная перезарядка** – обмен зарядом при столкновении однопородных частиц без изменения их внутренней энергии

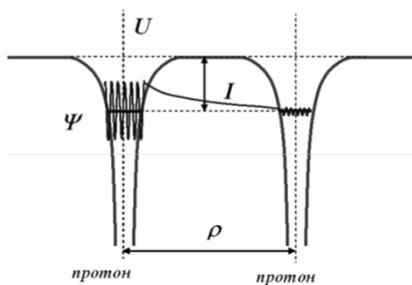
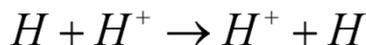
### Геометрия взаимодействия



$E_{кин} \gg E_{потенц}$   
 движение атомных частиц можно считать прямолинейным

$E_{кин} \ll 10 \text{ кэВ}$   
 Тогда  $V \ll V_0$

Сечение резонансной перезарядки протона на атоме водорода



**Вероятность** перехода электрона от атома к протону за единицу времени

$$P = \frac{V_0}{a_0} D = \frac{V_0}{a_0} e^{-\frac{2}{\hbar} \left| \int p dr \right|}$$

число ударов электрона о потенциальный барьер в единицу времени

коэффициент прохождения через потенциальный барьер

$p = \sqrt{2mI}$  – импульс электрона

Вероятность перезарядки

$$W \approx \frac{\rho}{V} P \approx \frac{\rho}{a_0} \frac{V_0}{V} e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mI} \rho}$$

← время пролета

ρ – мало ⇒ W > 1

↓  
 переход происходит несколько раз

W ~ 1/2

Сечение перезарядки

$$\rho = -\frac{\hbar}{2\sqrt{2mI}} \ln \frac{Va_0}{\rho V_0} \quad \begin{matrix} V_0 \gg V \\ \rho \sim a_0 \end{matrix}$$

$$|\rho| \approx \frac{\hbar}{2\sqrt{2mI}} \ln \frac{V_0}{V}$$

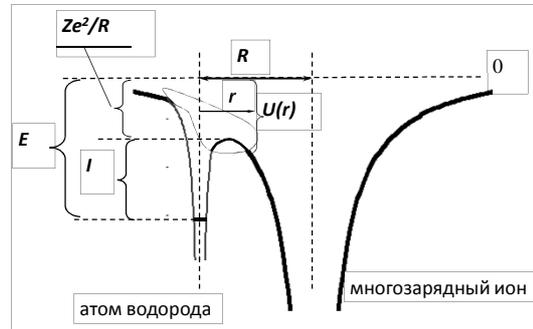
## Сечение перезарядки

$$\sigma_{пер} \approx \pi \rho^2 \approx \pi \frac{\hbar^2}{8mI} \ln^2 \frac{V_0}{V}$$

$$I \approx Ry = me^4 / 2\hbar^2 \quad a_0 = \hbar^2 / me^2$$

$$\sigma_{пер} \approx \frac{\pi a_0^2}{4} \ln^2 \frac{V_0}{V}$$

## Нерезонансная перезарядка атома водорода на многозарядном ионе



## Вероятность перезарядки

$$P \approx \frac{V_0}{a_0} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_0^{r_0} p(r) dr\right)$$

$$p(r) = \sqrt{2m[U(r) - E]} \quad \text{— импульс электрона}$$

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{|r-R|} - \frac{e^2}{r} \quad \text{— потенциальная энергия электрона в поле протона и многозарядного иона}$$

$$E = -I - (Ze^2/R) \quad \text{— энергия электрона вблизи протона}$$

## Импульс электрона

$$p(r) = \sqrt{2m(E - U(r))} =$$

$$\sqrt{2m\left(I + \frac{Ze^2}{R} - \frac{Ze^2}{R-r} - \frac{e^2}{r}\right)}$$

 $r \ll R$ 

$$\frac{Ze^2}{R-r} = \frac{Ze^2}{R\left(1-\frac{r}{R}\right)} \approx \frac{Ze^2}{R} \left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

$$p(r) \approx \sqrt{2m\left(I - \frac{Ze^2 r}{R^2} - \frac{e^2}{r}\right)}$$

## Импульс электрона

$$p(r) \approx \sqrt{2m\left(I - \frac{Ze^2 r}{R^2}\right)}$$

$$r_0 = IR^2 / Ze^2$$

$$p(r) \approx \sqrt{2mI\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)}$$

Вероятность прохождения  
электрона через барьер

$$P \approx \frac{V_0}{a_0} \exp \left\{ -\frac{2\sqrt{2mI}}{\hbar} \int_0^{r_0} \sqrt{\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} dr \right\}$$

$$P \approx \frac{V_0}{a_0} \exp \left\{ -\frac{4\sqrt{2mI}^{3/2}}{3\hbar Ze^2} R^2 \right\}$$

Вероятность перезарядки

$$I \cong e^2/2a_0 \quad R \approx \rho$$

$$W \approx \frac{\rho}{V} \frac{V_0}{a_0} \exp \left\{ -\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar Ze^2} \frac{e^3}{2\sqrt{2}a_0^2} \sqrt{\frac{\hbar^2}{me^2}} \rho^2 \right\}$$

$$W \approx \frac{\rho}{a_0} \frac{V_0}{V} e^{-\frac{2\rho^2}{3Za_0^2}}$$

Сечение перезарядки

$$\rho^2 = Z \frac{3a_0^2}{2} \ln \frac{V_0}{V} \sqrt{Z} \quad \begin{matrix} V_0 \gg V \\ \downarrow \\ \rho \sim \sqrt{Z} a_0 \end{matrix}$$

$$\sigma = \pi \rho^2 \cong \frac{3\pi}{2} Z a_0^2 \ln \sqrt{Z} \frac{V_0}{V}$$

Главное квантовое число  
захваченного электрона

энергия связи электрона при бесконечно  
большом расстоянии между продуктами

$$E_\infty = -Ry$$

После взаимодействия энергия электрона в  
поле заряда Z

$$E_{\text{ион}} = -Ry \frac{Z^2}{n^2}$$

$$n = Z$$

Учёт взаимодействия ионов

$$-Ry = -Ry \frac{Z^2}{n^2} + \frac{(Z-1)e^2}{R^*}$$

Перезарядка происходит, когда притяжение электрона к  
иону сравнимо с притяжением к протону

$$Ze^2 / (R^* - a_0)^2 = e^2 / a_0^2$$

$$R^* \approx a_0 (\sqrt{Z} + 1)$$

Учет туннелирования

$$R^* = \xi a_0 (\sqrt{Z} + 1) \quad \xi > 1$$

$$n^2 = \frac{Z^2}{1 + \frac{2}{\xi} (\sqrt{Z} + 1)}$$

Например при  $\xi = 2$   $n \approx Z^{3/4}$

Эмпирическая зависимость  $n \approx Z^{0.77}$

### Рекомбинация

**Рекомбинация** – взаимная нейтрализация сталкивающихся носителей зарядов противоположного знака (ионов, протонов, электронов)

Коэффициент рекомбинации  $\alpha_p \left[ \frac{\text{см}^3}{\text{с}} \right]$

Число актов рекомбинации в единице объема за единицу времени  $K_p = \alpha_p N_+ N_-$

### Сечение рекомбинации

$$\alpha_p = \int_0^{\infty} V \sigma_p f(V) d\vec{V}$$

$V$  - средняя тепловая скорость

$$\alpha_p \approx \sigma_p V$$

### Временная зависимость числа носителей заряда

Нейтральная двухкомпонентная система

$$\frac{dN_+}{dt} = \frac{dN_-}{dt} = -\alpha_p N_+ N_-$$

$$N = N^+ = N^-, \quad \alpha_p = \text{const} \quad N_{t=0} = N_o$$

$$N(t) = \frac{N_o}{1 + \alpha_p N_o t}$$

### Система с источником ионизации $Q$

$$\frac{dN}{dt} = Q - \alpha_p N^2 \quad N_o = 0$$

$$N = \left( \frac{Q}{\alpha_p} \right)^{1/2} \frac{\exp(2\sqrt{\alpha_p Q t}) - 1}{\exp(2\sqrt{\alpha_p Q t}) + 1}$$

Равновесное значение плотности ионов  $N = \left( \frac{Q}{\alpha_p} \right)^{1/2}$

Законы сохранения энергии + импульса + момента импульса



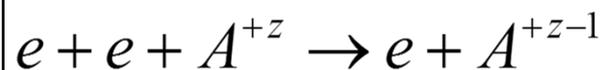
Рекомбинация двух частиц маловероятна



Рекомбинация возможна

- В присутствии третьей частицы
- При излучении фотона
- Если сопровождается диссоциацией молекулы

### Трехчастичная рекомбинация



Число электрон-электронных столкновений

$$N_1 \approx \nu_{ee} N_e \quad \nu_{ee} \approx N_e V \sigma$$

средняя частота столкновений электронов

Вероятность нахождения иона на критическом расстоянии  $W_z \approx N_z R_{kp}^3$

Число актов рекомбинации в единице объема в единицу времени

$$K_p \approx N_1 W_z \approx \sigma V N_e^2 N_z R_{kp}^3$$

$E$  – средняя кинетическая энергия электронов  $V \sim \sqrt{E/m}$

Сечение передачи энергии - кулоновское  $\sigma \sim e^4 / E^2$

$$\frac{dN_z}{dt} \approx \frac{e^4}{E^2} N_e^2 N_z \frac{Z^3 e^6}{E^3} \sqrt{\frac{E}{m}}$$

Коэффициент трехчастичной рекомбинации

$$\alpha \approx Z^3 \sqrt{\frac{E}{m}} \left( \frac{e^2}{E} \right)^5 N_e$$

Более точное выражение

$$\alpha \approx \frac{2\sqrt{2}}{9} \pi^{3/2} \left( \frac{e^2}{E} \right)^5 Z^3 \left( \frac{E}{m} \right)^{1/2} N_e \ln(1+Z^2)^{1/2}$$

Радиационная рекомбинация (фоторекомбинация)

Фоторекомбинация медленного электрона и иона с образованием сильно возбужденного атома

$$\frac{Z^2 m e^4}{2 \hbar^2} \gg \hbar \omega \gg \frac{m V_1^2}{2}$$

$$J = \frac{2 e^2}{3 c^3} \left| \frac{\ddot{\vec{r}}}{r} \right|^2 R_m(\rho)$$

Интенсивность излучения

Расстояние наименьшего сближения

Закон сохранения энергии

$$\frac{m V_m^2}{2} \approx \frac{m V_1^2}{2} + \frac{Z e^2}{R_m} \approx \frac{Z e^2}{R_m}$$

Закон сохранения момента импульса

$$V_1 \rho \approx V_m R_m$$

$$\rho^2 \approx \frac{2 Z e^2}{m} \frac{R_m}{V_1^2} \quad d\rho^2 \approx \frac{2 Z e^2}{m V_1^2} dR_m$$

Ускорение электрона в точке  $R_m$

$$\left| \frac{\ddot{\vec{r}}}{r} \right| \approx \frac{Z e^2}{m R_m^2}$$

Интенсивность дипольного излучения

$$J \approx \frac{2 e^2}{3 c^3} \left( \frac{Z e^2}{m R_m^2} \right)^2$$

Вероятность столкновения с заданным прицельным параметром

$$dW_p \propto d\sigma \approx 2\pi\rho d\rho$$

Полная излучаемая энергия

$$dE_\omega \sim J \Delta t d\sigma \approx \frac{2 e^6 Z^2}{3 c^3 m^2 R_m^4} \frac{R_m}{V_m} 2\pi\rho d\rho$$

Основная излучаемая частота

$$\omega \sim \frac{V_m}{R_m} \sim \left( \frac{2 Z e^2}{m R_m^3} \right)^{1/2} \quad d\omega \approx \left( \frac{2 Z e^2}{m} \right)^{1/2} \frac{3}{2} \frac{dR_m}{R_m^{5/2}}$$

$$dE_{\omega} \propto \frac{4\pi}{3} \frac{e^6 Z^2}{c^3 m^2 V_1^2} d\omega$$

С другой стороны  $dE_{\omega} \propto \hbar\omega d\sigma_p$

$$\frac{d\sigma_p}{d\omega} \approx \frac{4\pi}{3} \frac{e^6 Z^2}{c^3 m^2 V_1^2} \frac{1}{\hbar\omega}$$

Формула Крамерса

$$\hbar\omega \approx Z^2 m e^4 / 2\hbar^2 n^2 \quad k = mV_1 / \hbar$$

$$d\omega \sim (Z^2 m e^4 / 2\hbar^2 n^3) dn$$

$$dn \approx 1 \quad \Rightarrow \quad d\omega \approx 2 \frac{\omega}{n}$$

$$\sigma_{\text{оп}} \approx \frac{8\pi}{3} Z^2 \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \frac{1}{k^2 n}$$

Полное сечение рекомбинации

$$\sum_{n=1}^{n_{\text{max}}} (1/n) \approx \ln n_{\text{max}}$$

Из условия

$$\hbar\omega \approx \frac{Z^2 m e^4}{2\hbar^2 n_{\text{max}}^2} \approx \frac{mV_1^2}{2}$$