4. Обобщённые функции.

1. Множество X будем называть пространством со сходимостью, если выделена некоторая совокупность последовательностей его элементов которые называются сходящимися, и для каждой из них указан предел – некоторый элемент из X, причем

последовательность имеет не более одного предела;

последовательность $\{x, x, \dots, x, \dots\}$ имеет прелел x;

любая подпоследовательность сходящейся последовательноти сходится к тому же пределу.

2. Линейное пространство будем называть линейным пространством со сходимостью, если оно является пространством со сходимостью, причем операции суммы и умножения на константу являются непрерывными.

3. Пусть E – линейное пространство со сходимостью. Функционал $f : X \to C$ непрерывен, если $x_n \underset{E}{\to} x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x_0)$.

4. Пусть E – линейное пространство со сходимостью. Совокупность непрерывных линейных функционалов из E в C будем называть пространством обобщенных функций на основном пространстве (пространстве основных функций, пространтве пробных функций) E. Обозначение: E'.

5. E' – линейное пространство со сходимостью.

6. Значение функционала $f \in E'$ на элементе $x \in E$ называют действием f на x и обозначают $< f, x >$.

7. $\varphi \in D \overset{df}{\Leftrightarrow}$

а) $\varphi \in C^{\infty}(R^n, C)$

б) φ имеет компактный носитель.

8. Носителем функции φ (supp φ) называют замыкание множества $\{x : \varphi(x) = 0\}$

9. $\varphi_n(x) \underset{D}{\to} \varphi_0(x) \quad \overset{df}{\Leftrightarrow} \quad (\exists K$ – компактное множество $\forall n$ supp $\varphi \subset K)$ & $(\forall \alpha \ D^{\alpha}\varphi_n(x) \rightrightarrows D^{\alpha}\varphi_0(x))$.

10. $< \delta, \varphi > \overset{df}{=} \varphi(0) \ \Rightarrow \ \delta \in D'$

11. $f : R^n \to C, \quad f \in L^1_{loc} \overset{df}{\Leftrightarrow} \quad \forall x \in R^n$ существует окрестность U такая, что $f \in L^1(U)$.

12. $K \subset R^n$ компактное множество & $f \in L^1_{loc} \ \Rightarrow f \in L^1(K)$

13. $f \in L^1_{loc}$ определим регуляную обобщённую функцию $[f] \in D'$ следующим образом: $< [f], \varphi > \overset{df}{=} \int\limits_{R^n} f(t)\varphi(t)\,dt$

14. $f \in D'$ не являющиеся регулярными будем называть сингулярными.

15. $<\mathscr{P}_{1/x},\varphi>\stackrel{df}{=}$ v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)/t\,dt,\ \ \mathscr{P}_{1/x}\in D'$.

16. U открытое подмножество R^n, $\ f\in D'\ \ f|_U=0\ \stackrel{df}{\Leftrightarrow}\ \forall\varphi\in D$
supp $\varphi\subset U\Rightarrow <f,\varphi>=0$.

17. $f=g$ на $U\ \stackrel{df}{\Leftrightarrow}\ (f-g)|_U=0$.
18. $\delta\ =\ [0]$ на $R\backslash\{0\}\ \ \Rightarrow\ \ \delta$ – сингулярная обобщенная функция.

19. $<T_af,\varphi>\stackrel{df}{=}<f,T_{-a}\varphi>$.

20. $<f(Ax),\varphi(x)>\stackrel{df}{=}<f(t),\varphi(A^{-1}t)/|\mathrm{det}A|>$.
21. $f\in C^1(R,R)$ имеет только простые нули $\{x_n\}$, тогда
$\delta(a(x))=\sum\limits_n\frac{\delta(x-x_n)}{|a'(x_n)|}$.

22. $f\in D'\ \ <f',\varphi>\stackrel{df}{=}-<f,\varphi'>$.

23. $f\in D'\ \ <D^\alpha f,\varphi>\stackrel{df}{=}(-1)^{|\alpha|}<f,D^\alpha\varphi>$.
24. $f_n\underset{D'}{\to}f_0\ \ \Rightarrow\ \ D^\alpha f_n\underset{D'}{\to}D^\alpha f_0$.
25. Скачком кусочно непрерывной функции g в точке разрыва x_0 назовем величину: $h_0\stackrel{df}{=}f(x+0)-f(x-0)$.
26. Пусть $g:R\to R$ – кусочно гладкая функция и $\{x_n\}$ – точки разрыва g, тогда $[g]'=[g']+\sum h_n\delta(x-x_n)$.
27. $\sum\delta(x+2\pi k)=1/(2\pi)\sum\limits_n e^{inx}/(2in))$

28. $f\in D'$ точку $x\in R^n$ назовем существенной для f, если у x нет окрестности где f равна 0.
29. Множество всех существенной для f точек назовем носителем обобщённой функции f.
30. $<f*g,\varphi>\stackrel{df}{=}<f(y),<g(x),\varphi(x+y)>>$
31. Свёртка обобщённых функций из D' может быть определена, если носитель одной из них компактен или оба носителя ограничены с одной и той же стороны.
32. Свойства:

$\delta*f=f$, $\delta(x-a)*f=T_af$, $f*D^\alpha\delta=D^\alpha f$;

линейность;

коммутативность (без доказательства);

если у двух из трех обобщённых функций компактные носители, то ассоциативность(без доказательства);

перестановочность свертки с операторами дифференцирования и сдвига.

33. g называют фундаментальным решеним для оператора $L = \sum\limits_{|\alpha|<k} c_\alpha D^\alpha$ если $Lg = \delta$.
34. Если $Lg = \delta$, то $h * g$ – решение уравнения $Lf = h$.
35. Для оператора $Lf = f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \ldots + a_0 f$ фундаментальным решением будет $[Y\theta]$, где Y – решение задачи Коши $LY = 0,\ Y(0) = Y'(0) = \ldots = Y^{m-2}(0) = 0,\ Y^{m-1}(0) = 1$, а θ – функция Хевисайда.
36. $< [\hat{f}], \varphi > = < [f], \hat{\varphi} >$.
37. $\hat{F}(D) \not\subset D$.
38. $\varphi_n(x) \underset{S}{\rightarrow} \varphi_0(x) \overset{df}{\Leftrightarrow} (\forall \alpha \forall \beta \quad x^\alpha D^\beta \varphi_n(x) \rightrightarrows x^\alpha D^\beta \varphi_0(x))$.
39. $\hat{F} \in C(S, S)$.
40. $f \in S' \quad < \hat{f}, \varphi > \overset{df}{=} < f, \hat{\varphi} >$.
41. $\hat{f} \in S'$.
42. $D \subset S$
43. $\varphi_n(x) \underset{D}{\rightarrow} \varphi_0(x) \ \Rightarrow \ \varphi_n(x) \underset{S}{\rightarrow} \varphi_0(x)$.
44. $S' \subset D'$
45. $(f \in D'$ & $\mathrm{supp} f$ – компактное множество$) \Rightarrow f$ продолжается на S.
46. $\widehat{[1]} = \sqrt{2\pi}\delta$
47. $\hat{\delta} = [1/\sqrt{2\pi}]$.
48. $\widehat{[\theta]} = \sqrt{2\pi}\ \delta + i/\sqrt{2\pi}\ \mathscr{P}_{1/x}$
49. Для преобразования Фурье в S' верны утверждения установленные для S в 2.20.