Глава 4. Комплексные числа и многочлены

§1. Определение комплексного числа. Операции

Рассмотрим ур-е $x^2+1=0$, не имеющее решений в $\mathbb{R}$.

Формальное решение $x = \pm\sqrt{-1}$

Опр. Комплексным числом z наз. пара (a, b) действительных чисел $a = \operatorname{Re} z$ - действ. часть, $b = \operatorname{Im} z$ - мнимая часть,

при $b = 0$ $z = (a, 0)$ - отождествляем с действит. числом a;
при $a = 0$ $z = (0, b)$ - наз. мнимым.

Числа $(0,0) = 0$ нуль
$(1,0) = 1$ единица
$(0,1) = i$ мнимая единица

Операции с комплексными числами

Два компл. числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Суммой двух комп. чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ наз компл. число $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

Произведением $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ наз. число $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Вычислим $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$

Тогда $(0,b) = (0,1)(b,0) = i\cdot b$

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a + ib$$

Таким образом, каждое комплексное число можно представить в виде алгебраической формы $a + ib$.

Перепишем правила:

1. $a + ib = c + id \iff a = c$ и $b = d$
2. $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$
3. $(a+ib)(c+id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Сопряженное число $\bar{z} = a - bi$ к $z = a + bi$

Св-ва:

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. $z + \bar{z} = 2a$
5. $z - \bar{z} = 2ib$
6. $z\cdot\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geq 0$

Число $\sqrt{a^2+b^2}$ наз. модулем комплексного числа z.

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad |z| = |\bar{z}|$, $\quad z\cdot\bar{z} = |z|^2$

Операция деления

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Вычитание

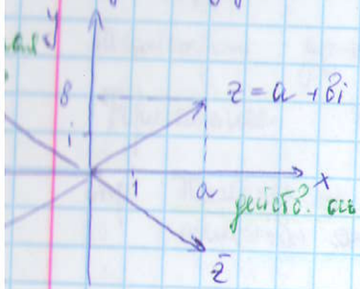
$\forall z_1, z_2 \ \exists!\ z$: $z + z_2 = z_1$
$z = z_1 - z_2$

Св-ва операций:

1. коммутативность $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
2. ассоциативность $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$; $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
3. дистрибутивность $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

§2 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Пусть задана на плоскости ПСК



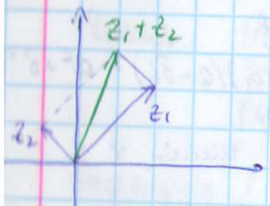
Комплексное число $z = a + bi$ изображается точкой плоскости с координатами (a, b).

Действ. числа – точки оси абсцисс
Чисто мнимые – точки оси ординат

Пл-ть, на которую изобр. КЧ, наз компл. пл-ю

Длина вектора z равна $|z|$ $\quad |Re\, z| \le |z|$

$|Im\, z| < |z|$



Число $z_1 + z_2$ изображается вектором, построенным по правилу сложения векторов z_1 и z_2

Расстояние м/у точками z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$

Нер-во треугольника

Для любых компл. чисел z_1 и z_2 $\quad \big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

Док-во: рассмотрим Δ с вершинами в точках $0, z_1, z_1 + z_2$.
Длины его сторон равны $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1 + z_2|$
Это изв. нер-во для длин сторон Δ

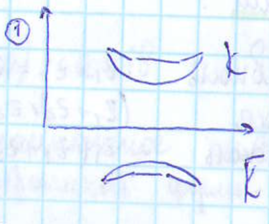
Следствие

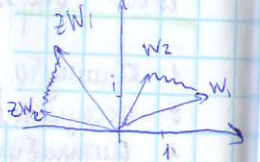
Для любых компл. чисел $z_1, z_2 \dots z_n$ выполняется

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Движение пл-ти

1. сопряжение
2. преобразование умн. на компл. число с модулем 1





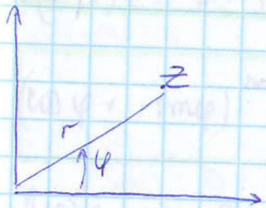
Сохранение длин (расстояний) м/у концами векторов

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}\, w\bar{w} = |w|^2$$

$$|zw_1 - zw_2|^2 = |z(w_1 - w_2)| = |w_1 - w_2|$$

Это поворот на угол $\mathcal{L} = \arg z$

§3. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Извлечение корня из к.ч.



$z = a + ib$

В полярной СК z опр. числами (r, φ)
$r = |z|$
φ - угол между действ. осью z

$\varphi > 0$, если отсчет идет против часовой стрелки.

φ наз аргументом КЧ z. Обозначается $\boxed{\varphi = \arg z}$.

$$\boxed{\begin{aligned} a &= r\cos\varphi \\ b &= r\sin\varphi \end{aligned}} \quad (1)$$

Следовательно, любое КЧ можно представить в виде

$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ тригонометрическая форма КЧ}}$ (2)

Из (1) $z = a + ib$, $\varphi = \arg z$, следует, что

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \quad \boxed{\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \quad (3)$$

Обратное утв. тоже верно: φ явл. $\arg z \Leftrightarrow$ вып. рав-во (3)
т.е. для нахождения φ надо решить систему ур-й (3)

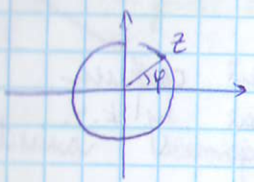
Система ур-й (3) имеет ∞-кол-во решений.

$\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

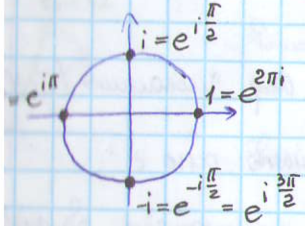
φ_0 - одно из решений (3)

Если $|z| = 1$, $\varphi = \arg z$, то $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Это КЧ обозн. $e^{i\varphi}$



$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$ формула Эйлера



В формуле Эйлера $\varphi \to -\varphi$ получаем равенство

$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ (5)

Если (4)+(5), (4)-(5) получим формулы Эйлера

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}} \qquad \boxed{\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$$

Функция $e^{i\varphi}$ обладает обычными св-ми показат. ф-и

$$\boxed{e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}}$$

Расм. пр-е:

$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$= (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) =$

$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) =$

$= e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Расм. деление:

$$\boxed{\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

$\boxed{(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}}$ * доказательство по индукции *

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos\varphi n + i\sin\varphi n \quad \text{формула Муавра}}$$

Любое КЧ $z \neq 0$ можно представить в виде $z = re^{i\varphi}$

$r = |z|$, $\varphi = \arg z$

$$\boxed{z = re^{i\varphi} \quad \text{показательная форма КЧ}}$$

Используя показат. форму, легко умножать и делить КЧ.

$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Из тих формул видно, что $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, а сумма аргументов явл. аргументом пр-я.

Если $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$, то $\boxed{\varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 z_2)}$

Аналогично $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

Если $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$, то $\varphi_1 - \varphi_2 = \arg \frac{z_1}{z_2}$.

Извлечение корня целой степени из КЧ

Расм. ур-е $z^n = a$, где $a \neq 0$ КЧ, а $n \in N$

Пусть $a = \rho e^{i\theta}$, $z = r e^{i\varphi}$

Тогда $r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$

Следовательно, $r^n = \rho$, $n\varphi = \theta + 2\pi k$

$\Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$ $\qquad \varphi_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots}$$

$k=0$ $\quad z_0 = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$

$k=1$ $\quad z_1 = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2\pi}{n}}$

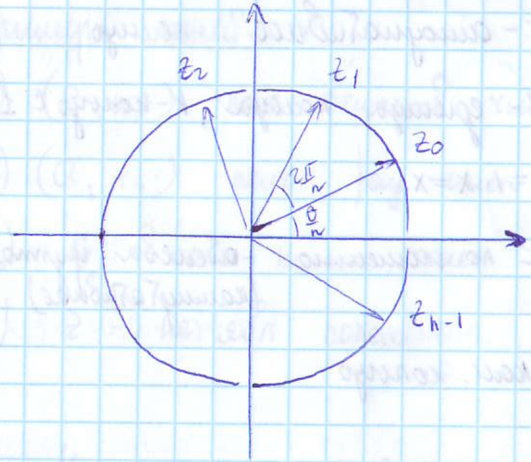
$\vdots$

$k=n-1$ $\quad z_{n-1} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}}$

$k=n$ $\quad z_n = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2\pi n}{n}}$ $\qquad \arg z_n = \frac{\theta + 2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$

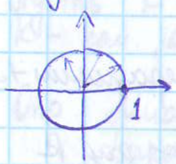
т.е. $z_n = z_0$
$z_{n+1} = z_1$
$\vdots$

Т.е. ур-е $z^n = a$ имеет ровно n различных решений.



$z_0 \ldots z_{n-1}$ расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$

Следствие Корни n-ой степени из 1 $\sqrt[n]{1}$



$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots n-1$$

§4. Кольца и поля

Кольцом наз алгебраическая система с двумя бинарными операциями – сложением $x, y \to x+y$
– умножением $x, y \to x \cdot y$

удовл. следующ условиям (аксиомы кольца):

К1) $\forall x, y, z \in K$ $(x+y)+z = x+(y+z)$ ассоциативность сложения

К2) $\forall x, y, z \in K$ $x+y = y+x$ коммутативность сло-я

К3) $\exists!\, 0$ (ноль кольца) $\forall x \in K$ $x+0 = x$

К4) $\forall x \in K$ $\exists!\, (-x)$ $x+(-x) = 0$ противоположный эл-т

К5) $\forall x, y, z \in K$ $(x+y)z = xz + yz$
$z(x+y) = zx + zy$

К6) $\forall x, y, z \in K$ $(xy)z = x(yz)$ ассоциативность умножения

Если вып. К6, то К - ассоциативное кольцо.

Если вып К7, то 1 - единица кольца, К - кольцо с 1.

К7) $\exists! 1 \quad \forall x \in K \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

К1-К4) означают, что К по сложению - абелева группа (коммутативная)

Если вып К8, то К - ком. кольцо

К8) $\forall x, y \quad x \cdot y = y \cdot x$

Пример

1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ кольцо целых чисел с обычными операциями "+, ·"

2) $M_n(\mathbb{R})$ кольцо квадратных матриц порядка n над $\mathbb{R}$

3) $\mathbb{Z}_m$ - кольцо вычетов по модулю m

m-целое

$n \equiv k \pmod{m}$, если они дают одинаковый остаток при делении на m.

$\mathbb{Z}_2$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{Z}_3$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Опр. Полем наз ассоциативное и коммутативное кольцо с 1, в котором $\forall x \neq 0 \ \exists x^{-1}$ - обратный элемент

$x x^{-1} = 1$

Примеры полей:

1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ - поле веществ. чисел

2) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ - поле рац. чисел

3) $\mathbb{C}$ - поле комп. чисел

4) $\mathbb{Z}$ - не явл полем

§5. Многочлен от одной переменной. Деление мн-ов. НОД

Пусть К - одна из числ. систем $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ (в общем случае К - ком., ассоц. кольцо с 1)

Опр. Многочленом от x с коэф-ми из К наз. формальное выражение вида $\boxed{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}$, где $n \geq 0$ $n \in \mathbb{Z}$ $a_0 \ldots a_n \in K$

a_k - коэф.-т мн-на при x^k.

Понятие равенства многочленов

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$

$\boxed{f = g \quad \forall k \quad a_k = b_k}$

Для мн-ов можно определить сумму и умножение стандартным образом.

Для этих операций выполняется св-ва К1-К5 в опр. кольца.

1) ассоциативность $(f+g)+h = f+(g+h)$
2) коммутативность $f+g = g+f$
3) существование нуля
4) сущ. противоположного элемента
5) дистрибутивность $(f+g)h = fh + gh$
$f(g+h) = fg + fh$

Т.е. многочлены с элементами из K сами образуют кольцо.

Обозначение $K[x]$

В этом кольце есть 1

Опр. Степень ненулевого многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ — max наибольшее k : $a_k \neq 0$

Обознач. $\boxed{\deg f}$

$\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g)$

$\deg f \cdot g = \deg f + \deg g$

Деление многочленов

Теорема: Пусть f, g — 2 мн-на, причем $g \neq 0$. Тогда сущ. 2 мн-на q и r такие, что $f = q \cdot g + r$

$\to r = 0$, если делится нацело

$\to \deg r < \deg g$

Многочлены q и r опр. однозначно.

Нахождение q и r наз делением ~~числ~~ с остатком. q — частное, r — остаток от деления f на g.

Док-во:

1) Если $\deg f < \deg g$, то можно взять $q = 0$, $r = f$

2) Если $\deg f \geq \deg g$, то делим „уголком"

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$, где $a_0, b_0 \neq 0$

Далее:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \,\Big|\, \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{\frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + \ldots}$$

степень понижается на 1

Расм. многочлен $f_1 = f - \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}g$, $\deg f_1 < \deg f$.

В этом случае $q = \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$, $r = f_1$.

Иначе делим дальше

Докажем, что q и r определены однозначно.

Пусть $f = q_1g + r_1 = q_2g + r_2$

$\deg r_1 < \deg g$

$\deg r_2 < \deg g$

Расм разность $r_1 - r_2$:

$r_1 - r_2 = (q_2 - q_1)g$

$\deg(r_1 - r_2) = \deg(q_2 - q_1) + \deg g \geq \deg g$

$\to$ противоречие

$\to$ q и r опр. однозначно.

Следствие (теорема Безу)

Деление с остатком на мн-н $x-c$.

$f(x) = (x-c)\,q(x) + r$

$f(c) = r$, то есть остаток равен значению мн-на в точке c.

§6 Корни многочлена. Основная теорема алгебры. Формулы Виета. Рац. корни мн-на.

Опр. Элемент c наз корнем мн-на, если $f(c) = 0$.

Из Т Безу следует: !!!

Т1 c корень $\Longleftrightarrow f(x)$ делится на $x-c$

Т2 число корней ненулевого мн-на не превосходит его степени

Док-во: пусть c_1 – корень f. Тогда $f(x) = (x-c_1) f_1(x)$

пусть c_2 – корень. Тогда $f_1(x) = (x-c_2) f_2(x)$

получаем $f(x) = (x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_m)g$, где g не имеет корней. ч.т.д.

$m = \deg f - \deg g \leq \deg f$

Корень наз простым, если $f(x)$ не делится на $(x-c)^2$, иначе c – кратный корень.

Кратность корня наз наиб. k такое, что f делится на $(x-c)^k$

Т3 уточнение Т2: число корней ненулевого мн-на с учетом их кратностей не превосходит степень мн-на.

Равенство имеет место т и т т, когда мн-н раскладается на линейные множители. $f(x) = (x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_m)^{k_m} g$

где $c_1 \ldots c_m$ – различные корни

$k_1 + \ldots + k_m = \deg f - \deg g \Rightarrow \deg g = 0$ т.и. имеет место равенство.

Основная теорема алгебры (без док-ва)

[Впервые строго доказал Гаусс в 1779 г.]

Всякий ненулевой мн-н (положит. степени) над полем комплексных чисел имеет корень. (алгебраическая замкнутость поля К4)

Следствие 1

Всякий мн-н степени n над полем $\mathbb{C}$ имеет n корней (с учетом кратности)

Следствие 2

Всякий мн-н с комплексными коэф-ми раскладается на линейные множители.

Формулы Виета

Пусть $f(x)$ – мн-н степени n.

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$ имеет n корней (с учетом кратностей)

и пусть $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ – корни, выпис. с уч. кр.

... вид:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$\vdots$

$$\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

$$x_1 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Док-во:

Многочлен $f(x)$ может быть представлен в виде:

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Члены, содержащие x^{n-k}

$$a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-k})(x - x_{n-k+1}) \ldots (x - x_n)$$

получаются при перемножении первых слагаемых из каких-то $n-k$ скобок и вторых слагаемых из остальных k скобок.

Коэф-т каждого такого члена равен произведению каких-то k эл-ов из $x_1 \ldots x_n$, умнож. на $(-1)^k a_0$, т.е. при x^{n-k} получаем $\sum x_{i_1} \ldots x_{i_k} (-1)^k a_0$ □

Замечание

В частности, для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Рациональные корни

Теорема

Пусть $f(x)$ - мн-н с целыми коэф-ми. Если рациональное число $\boxed{x_0 = \frac{p}{q}}$, где p и q - взаимно простые целые числа (НОД = 1) яв-ся корнем мн-на $f(x)$, то q делит старший коэф-т этого мн-на, а p делит его свободный член!

(т.к. каждое целое число, отличное от нуля, имеет лишь конечное число делителей, то теорема позволяет путем конечного перебора найти все рациональные корни)

Док-во:

Пусть $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ $(a_0, a_1 \ldots a_n \in \mathbb{Z})$

Подставим предполагаемый корень $x_0 = \frac{p}{q}$:

$$f(x_0) = a_0 \frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = 0 \quad | \cdot q^n$$

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0$$

Заметим, что все слагаемые, кроме первого, делятся на q

$\Rightarrow$ первое слагаемое делится q.

т.к. p и q взаимно простые, тогда a_0 делится на q.

Аналогично $a_n \vdots p$.

Пример

$$3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$$

Делители старшего к-та: $\pm 1 \; \pm 3$

Делители свобод. члена: $\pm 1 \; \pm 2$

$\Rightarrow$ рациональными корнями могут быть: $\pm 1 \; \pm 2 \; \pm \frac{1}{3} \; \pm \frac{2}{3}$

$\rightarrow$ проверка $\rightarrow x_0 = \frac{2}{3}$.