Основы функционального анализа и теории функций

(3-ий семестр, лекции 32 ч., семинары 32 ч., экз.)

Лектор - Лашина Елена Александровна

Программа и основное содержание лекций

1. Элементы теории функций комплексного переменного (10 часов)

1. Функции комплексного переменного. Арифметические операции с комплексными числами. Геометрические понятия. Отображения, соответствующие элементарным функциям. Обратные функции. Стереографическая проекция. Бесконечно удаленная точка. Дробно-линейные отображения.

2. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Гармонически сопряженные функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной по комплексному аргументу. Понятие конформного отображения, формулировка теоремы Римана. Решение задачи Дирихле на плоскости.

3. Интегрирование функций комплексного переменного. Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши. Интеральная формула Коши. Производные высших порядков. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля.

4. Представление функций комплексного переменного рядами. Ряды Тейлора и Лорана. Аналитические функции. Дифференцируемость и аналитичность. Аналитическое продолжение. Многозначные функции. Обобщение понятия аналитической функции. Функции $\sqrt[n]{z}$ и $\mathrm{Ln} z$.

5. Изолированные особые точки и их классификация. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Основная теорема о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

2. Ряды Фурье (6 часов)

6. Ряды Фурье для 2π-периодических функций в вещественной и комплексной форме. Теорема Фурье. Лемма Римана-Лебега. Ряды Фурье для чётных и нечётных функций. Ряды Фурье для функций с произвольным периодом. Амплитудный и фазовый спектры.

7. Неравенство Бессселя. Дифференцирование рядов Фурье. Равномерная сходимость рядов Фурье. Равенство Ляпунова. Скорость сходимости рядов Фурье.

8. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами. Явление Гиббса. Применение метода разделения переменных для решения уравнений в частных производных в случае ограниченного интервала.

3. Преобразование Фурье (6 часов)

9. Интегральная формула Фурье как предельный случай рядов Фурье. Преобразование Фурье. Косинус- и синус- преобразования Фурье. Свойства преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций: ограниченность, непрерывность, асимптотическое поведение, дифференцирование, сдвиг, подобие.

10. Свёртка функций и её свойства: ограниченность, абсолютная интегрируемость, коммутативность, ассоциативность, преобразование Фурье.

11. Преобразование Фурье быстро убывающих функций. Формула Парсеваля. Преобразование Фурье функций, интегрируемых с квадратом. Теорема Планшереля (формулировка).

4. Операционное исчисление (4 часа)

12. Преобразование Лапласа. Подобие, запаздывание, смещение, дифференцирование, свертка.

13. Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений. Теорема Бореля и формула Дюамеля. Решение интегральных уравнений.

5. Обобщенные функции (6 часов)

14. Обобщенные функции, δ-функция Дирака и δ-образующие последовательности. Сходимость последовательности обобщенных функций, формулы Сохоцкого. Замена переменных в обобщенных функциях, умножение на бесконечно дифференцируемые функции. Дифференцирование обобщенных функций. Фундаментальное решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

15. Преобразование Фурье обобщенных функций, операции дифференцирования и свертки. Примеры. Формула Пуассона. Теорема Котельникова-Шеннона.

16.Дискретное преобразование Фурье. Быстрое преобразование Фурье. Приложения преобразования Фурье.

Литература

Методические пособия по курсу доступны на сайте КВМ ФФ НГУ по следующим ссылкам:
http://www.phys.nsu.ru/ok03/OFA.html
http://www.phys.nsu.ru/ok03/TFKP.html.

Дополнительная литература

1. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
2. Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного.М.: Наука, 1970.
3. М.И. Шабунин, Е.С. Половинкин,М.И. Карлов. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
4. В.С. Владимиров. Обобщенные функции и их применение. М.: Знание, 1990.
5. Ю. Сато. Обработка сигналов. Первое знакомство. М.: Додека, 2002.
6. С.И. Баскаков. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2000.

Программа практических занятий

1 занятие — Функции комплексного переменного, условия Коши-Римана.
2 занятие — Конформные отображения. Дробно-линейные отображения, их основные свойства, приложения.
3 занятие — Комплексное интегрирование. Основные свойства интеграла.
4 занятие — Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки и их классификация. Вычет в изолированной особой точке.
5 занятие — Теорема о вычетах. Применение вычетов для вычисления определенных интегралов.
6 занятие — Разложение периодических функций в ряд Фурье. Разложение только по синусам или только по косинусам.
7 занятие — Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом. Комплексная форма ряда Фурье.
8 занятие — Равенство Ляпунова. Суммирование числовых рядов с помощью рядов Фурье. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов Фурье.
9 занятие — Представление функции её интегралом Фурье. Общие свойства преобразования Фурье: сдвиг по фазе, сдвиг по аргументу.
10 занятие — Производная от преобразования Фурье и преобразование Фурье от проризводной.
11 занятие — Свертка и ее связь с преобразованием Фурье.
12 занятие — Преобразование Лапласа: оригиналы и изображения. Теоремы подобия и смещения, дифференцирование и интегрирование изображений и оригиналов. Решение начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
13 занятие — Запаздывание и свертка оригиналов. Теорема Бореля и формула Дюамеля. Решение интегральных уравнений.

14 занятие — Основные и обобщенные функции. Сходимость обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций. Применение теоремы о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального оператора.
15 занятие — Умножение обощенных функций на бесконечно дифференцируемые. Линейная и нелинейная замена переменных в обобщенных функциях. Свертка обобщенных функций.
16 занятие — Обобщенные функции медленного раста и преобразование Фурье от них. Повторный разбор наиболее трудных вопросов из предыдущих занятий.

Задания по основам функционального анализа и теории функций

Задание 1 (*сдать до 16 октября*)

1. Найти все значения степеней 1^i, 2^i, i^i.

2. Написать условия Коши-Римана в полярных координатах. Выяснить, существует ли аналитическая функция, чья вещественная часть u задается следующим образом:

$$a)\, u = \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad b)\, u = \exp(x/y).$$

3. Найдите дробно-линейное отображение, переводящее соответственно точки i, ∞, $-i$ в точки 2, $1 + i$, 0, и выясните, во что при этом отображении переходит правая полуплоскость $\mathrm{Re} z > 0$.

4. Найдите образ множества D на коплексной плоскости под действием отображения $\omega = \omega(z)$ для следующих случаев:

$$a)\, D = \{z : \mathrm{Im} z > a > 0\},\ \omega = z^2; \qquad b) D = \{z : \mathrm{Re} z < 0, 0 < \mathrm{Im} z < \pi\},\ \omega = \mathrm{e}^z.$$

5. Функцию

$$\frac{\ln(z^2 + 1)}{z - 2}$$

разложить в ряд Лорана в точке $z = \infty$ и в кольце $1 < |z| < 2$.

6. Для каждой из указанных ниже функций найти ее вычеты относительно всех ее изолированных особых точек:

$$a) \frac{1}{e^z + 1} - \frac{1}{z}, \qquad b) \frac{1}{(z^4 + 1)\sqrt{z^2 + 1}}.$$

7. Вычислите интегралы

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx, \qquad b) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{(x+1)(x+2)} dx.$$

Задание 2 (*сдать до 20 ноября*)

8. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье
a) по синусам кратных дуг;
b) по косинусам кратных дуг;
c) в интервале между 0 и 2π.

9. Используя результаты предыдущей задачи, найти суммы следующих рядов:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

.

10. Разложить функцию $f(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2)$ в ряд Фурье с использованием комплексной формы ряда Фурье ($|a| < 1$).

11. Пусть гладкая на отрезке $-\pi \le x \le \pi$ функция $f(x)$ принимает равные значения на концах этого отрезка и "в среднем"равна нулю, то есть

$$f(-\pi) = f(\pi), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

С помощью равенства Ляпунова докажите следующее неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

Приведите пример функции, которая обладает указанными свойствами.

12. Используя интегральную формулу Фурье, доказать равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy) + y\sin(xy)}{1+y^2} dy = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \pi/2, & x = 0, \\ \pi \mathrm{e}^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

13. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = H(x)e^{-ax}$, где $H(x)$ – функция Хевисайда, $a > 0$.

14. Найти преобразование Фурье косинусоидального испульса

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & |t| \le \pi/2, \\ 0, & |x| > 0. \end{cases}$$

15. Найти обратное преобразование Фурье для $f(ay)$, если

$$a)f(y) = \frac{\sin y}{y}; \qquad b)f(y) = \frac{\sin^2 y}{y^2}.$$

16. Используя результаты предыдущей задачи, найти значения интегралов

$$a)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}; \qquad b)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2}.$$

17. Для функции $f_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^x, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ где $\Gamma(a)$ – гамма-функция, докажите равенство $f_a * f_b = f_{a+b}$, $a, b > 0$.

Задание 3 (*сдать до 30 декабря*)

18. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой подобия, найдите преобразование Лапласа от функции $f(t) = \sin^2 3t$. Укажите область определения найденного изображения.

19. Дано изображение

$$F(p) = \frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)}.$$

Используя разложение дробей на простейшие, найдите соответствующий оригинал $f(t)$.

20. Используя преобразование Лапласа, решите задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$y_1'' + y_2' + y_1 = e^t, \qquad y_1' + y_2'' = 1,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2'(0) = 2.$$

21. Используя преобразование Лапласа, решите интегральное уравнение

$$x(t) - e^{-2t} \int_0^t e^{2s} x(s) ds = 1 + t, \quad t > 0.$$

22. Покажите, что регулярные обобщенные функции $[\delta_a]$, порожденные функциями

$$\delta_a(x) = \frac{a}{\pi^2 (x^2 + a^2)},$$

при $a \to +0$ сходятся к δ-функции Дирака.

23. Вычислить вторую производную и преобразование Фурье обобщенных функций

$$a)|x|, \qquad b)|\sin x|.$$

24. Опишите действие обобщенной функции $\delta'' * |x|$.

25. Используя теорему о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального оператора, найдите фундаментальное решение дифференциального оператора

$$\frac{d^2}{dx^2} + \lambda,$$

то есть найдите частное решение дифференциального уравнения $f'' + \lambda f(x) = \delta(x)$.

Задания повышенной сложности (*сдать до 30 декабря*)

1*. Интегрируя функцию $f(z) = \mathrm{e}^{iz^2}$ по границе сектора

$$S = \{0 \le |z| \le R,\ 0 \le \arg z \le \pi/4\},$$

вычислите интеграл Френеля $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ix^2} dx$.

2*. Докажите, что при конформном отображении областей гармонические функции переходят в гармонические, и найдите решение задачи Дирихле

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (0, \pi),$$

$$u(x, 0) = 1,\ x > 0, \quad u(x, 0) = 0,\ x < 0, \quad u(x, \pi) = 0.$$

С помощью компьтерной программы построить поверхность $u(x, y)$.

3*. Используя преобразование Фурье, найдите решение $u(t, x)$ задачи Коши для волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x),$$

если функции $f(x)g(x)$ являются быстро убывающими, и $x \in (-\infty, +\infty)$.

4*. Пусть a и v – постоянные и $E(x, t)$ – обобщенная функция, заданная на плоскости формулой

$$E(x, t) = \begin{cases} a, & \text{если } x^2 \le v^2 t^2 \text{ и } t \ge 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В зависимости от данного v подберите постоянную a так, чтобы E было фундаментальным решением оператора

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

5*. Для скалярного поля $u(x, y, z)$ и векторного поля $F(x, y, z)$ найдите Фурье-образы ∇u, Δu, $\mathrm{div} F$ и $\mathrm{rot} F$. Записать уравнения Максвелла в однородной среде без свободных зарядов относительно компонент Фурье полей при разложении на монохроматические плоские волны.

6*. С помощью формулы Пуассона вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

Обратите внимание, что участвующая в вычислениях функция не является быстро убывающей. Обоснуйте для нее законность применения формулы Пуассона.