ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Лектор — Татьяна Александровна Ротанова
4-й семестр

Геометрия пространств со скалярным произведением

Линейные пространства и их подпространства. Нормированные пространства. Евклидовы и унитарные пространства. Неравенство Коши – Буняковского. Норма, порожденная скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Непрерывность скалярного произведения. Ортогональность векторов. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта. Задача о наилучшем приближении — проектирование на замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве. Ближайший вектор и ортогональная проекция. Разложение пространства в прямую сумму замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция на конечномерное подпространство. Неравенство Бесселя. Теорема о существовании Гильбертова базиса. Эквивалентные определения Гильбертова базиса. Теорема Рисса-Фишера. Теорема об изоморфизме бесконечного сепарабельного гильбертова пространства. Полнота тригонометрической системы функций, равенство Парсеваля для данной системы функций.

Весовое пространство Лебега. Определение и общие свойства ортогональных многочленов. Трёхчленная рекуррентная формула. Расположение нулей ортогональных многочленов. Классические ортогональные многочлены. Основная информация о многочленах Лежандра — производящая функция, рекуррентная формула, вывод дифференциального уравнения и соотношения ортогональности, формула Родрига и теорема о разложении по многочленам Лежандра.

Операторы в гильбертовых пространствах

Линейные операторы, их общие свойства, операции над ними. Эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора. Норма оператора. Теорема об эквивалентности ограниченности оператора и конечности его нормы. Сходимость операторов. Теорема о полноте пространства операторов (идея доказательства). Операторные ряды и их свойства. Обратимость операторов. Свойства обратных операторов. Теорема Неймана. Теорема Банаха (без доказательства). Классификация точек спектра. Свойства спектра. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве.

Свойства ядра линейного функционала. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала. Бра- и кет-векторы (примеры использования). Сопряжённый оператор и его свойства. Применение сопряжённого оператора при нахождении спектра. Теорема о точечном спектре самосопряжённого оператора. Теорема о норме самосопряжённого оператора. Теорема об инвариантном пространстве. Компактные множества. Компактные операторы. Теорема Гильберта – Шмидта о собственном базисе компактного самосопряжённого оператора.

Интегральные уравнения

Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра. Теорема о компактности оператора Гильберта—Шмидта. Оператор, сопряжённый оператору Гильберта—Шмидта. Уравнение с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма. Уравнения с малым параметром. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений. Теорема о повторном ядре оператора Гильберта—Шмидта. Интегральные уравнения с симметричными ядрами. Теорема Гильберта – Шмидта для интегральных операторов.

Элементы вариационного исчисления

Примеры задач классического вариационного исчисления. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума. Уравнения Эйлера. Лемма Лагранжа. Задачи о брахистохроне и о поверхности вращения минимальной площади. Задачи с несколькими переменными. Уравнение Эйлера для задачи с высшими производными. Задача с подвижными концами, условия трансверсальности. Изопериметрическая задача — теорема Эйлера. Условный экстремум. Правило множителей Лагранжа.

Литература

1. Абашеева Н. Л. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах в примерах и задачах: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2007.
2. Александров В. А. Геометрия пространств со скалярным произведением: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1995.
3. Александров В. А. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах: Метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.
4. Александров В. А. Ортогональные многочлены: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
5. Александров В. А., Егоров А. А. Вариационное исчисление: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 1996.
6. Александров В. А., Колесников Е. В. Интегральные уравнения: Метод. указания. Новосибирск: НГУ, 1993.
7. Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Выш. шк., 1978.

8. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1966.
9. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
10. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.
11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд., испр. М.: Наука, 1989.
12. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974.
13. Подвигин И. В. Гильбертово пространство в примерах и задачах: Учеб.-метод. пособие. Новосибирск: НГУ, 2012.
14. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.
15. Романко В. К., Агаханов Н. Х., Власов В. В., Коваленко Л. И. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационного исчисления. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2006
16. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965.

План семинаров

Нормированные пространства и пространства со скалярным произведением	6 час.
Ортогональные многочлены (общие свойства, многочлены Эрмита, многочлены Лагерра)	6 час.
Контрольная работа	2 час.
Операторы в гильбертовых пространствах	8 час.
Интегральные уравнения	4 час.
Вариационное исчисление	4 час.
Контрольная работа	2 час.

Задания по "Основам функционального анализа и теории функций"

4-й семестр

Задание 4

сдать до 20 марта

1. Убедитесь, что произвольные три элемента x, y и z унитарного пространства связаны тождеством Аполлония

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

2. Докажите, что можно определить скалярное произведение в пространстве $L_p[0,1]$, $p \geq 1$, согласованное с его «естественной» нормой, тогда и только тогда, когда $p=2$.

3. Посчитайте углы треугольника, образованного элементами 0, $t\sqrt{12}$, $5t^2-3$ евклидова пространства $L_2[-1,1]$.

4. В пространстве $L_2[-1,1]$ найдите ортогональную проекцию функции $\cos t$ на подпространство многочленов степени не выше 2.

5. Доказать тождества:
(а) $\dfrac{d}{dx}(e^{-x^2}H_{n-1}(x))=-e^{-x^2}H_n(x)$;
(б) $\dfrac{d}{dx}(e^{-x}x^{\alpha+1}L_{n-1}^{\alpha+1}(x))=ne^{-x}x^{\alpha}L_n^{\alpha}(x)$.

6. Вычислить интегралы:
(а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}xH_n(x)H_{n+1}(x)\,dx$;
(б) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha+1}L_n^{\alpha}(x)L_{n+1}^{\alpha}(x)\,dx$.

7. Разложить функции:
(а) $\sin 2x$ по многочленам Эрмита;
(б) $\sqrt{x}$ по многочленам Лагерра.

Задание 5

сдать до 25 апреля

В задачах 8–16 рассматривается «диагональный» оператор $A: l_2 \to l_2$, действующий по правилу:

$$A:(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)\mapsto(a_1x_1,a_2x_2,\ldots,a_nx_n,\ldots),$$

где $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ — фиксированная ограниченная последовательность комплексных чисел.

8. Докажите, что A — линейный непрерывный оператор, и посчитайте его норму.

9. Выясните, когда оператор A обратим, и в случае обратимости найдите обратный оператор.

10. Найдите точечный спектр оператора A.

11. Найдите резольвентное множество и резольвенту оператора A.

12. Найдите сопряжённый к A оператор.

13. Выясните, когда оператор A самосопряжён.

14. Выясните, когда оператор A унитарен.

15. Найдите остаточный и непрерывный спектры оператора A.

16. Докажите, что оператор A компактен тогда и только тогда, когда $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В задачах 17–19 рассматривается оператор «сдвига» $A : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, действующий по правилу $(Ax)(t) = x(t - a)$, $t \in \mathbb{R}$, где a — фиксированное вещественное число.

17. Докажите, что A — линейный непрерывный оператор, и посчитайте его норму.

18. Докажите, что оператор A обратим, и найдите его обратный оператор.

19. Найдите сопряжённый к A оператор.

Задание 6

сдать до 29 мая

20. Составить интегральное уравнение, соответствующее задаче Коши:

$$x''' + tx' - 2x = \cos t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 2.$$

21. Решить интегральное уравнение

$$x(t) = \int\limits_0^{\pi} \sin(t + 2s)x(s)\, ds + \sin 2t.$$

22. Найти повторные ядра и резольвенту, а также представить через резольвенту решение интегрального уравнения

$$x(t) - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{x(s)}{(2 - t)(2 - s)}\, ds = 2 - t.$$

23. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$x(t) - \lambda \int\limits_0^1 (2\pi t \sin 2\pi s - 1)x(s)\, ds = 0.$$

24. Выяснить, для каких функций f из пространства $L_2[0,1]$ разрешимо интегральное уравнение

$$x(t) - 6\int\limits_0^1 (2ts - s^2)x(s)\,ds = f(t).$$

25. Найти экстремали функционала в классе гладких функций

$$I[y] = \int\limits_0^1 (y^2 + {y'}^2 + 2e^{2x}y)\,dx, \quad y(0) = 1/3,\ y(1) = e^2/3.$$

26. Найти экстремали функционала в классе гладких функций

$$I[y,z] = \int\limits_0^{\pi/2} (2yz - 2y^2 + {y'}^2 - {z'}^2)\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1,\ z(0) = 0,\ z(\pi/2) = -1.$$

27. Найти экстремали функционала в классе гладких функций

$$I[y] = \int\limits_0^{\pi/2} [2y\sin x + (y'')^2]\,dx, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1,\ y(\pi/2) = -1,\ y'(\pi/2) = \pi^2/4.$$

28. Найти экстремали изопериметрической задачи

$$I[y] = \int\limits_0^1 (y^2 + y'^2)\,dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 4e,$$

со связью $\int\limits_0^1 ye^x\,dx = 1 + e^2$.

Правила аттестации студентов по "Основам функционального анализа и теории функций"

4-й семестр

1. В течение семестра студент сдаёт задания своему семинаристу в устной форме. Рассказывая решение, отвечает на все возникшие у преподавателя вопросы по теории. За каждую задачу, сданную в срок (полностью или частично), студент получает от 0 до 6 баллов. За сдачу задания после срока баллы не начисляются. Для положительной итоговой оценки по предмету все задачи должны быть сданы до конца зачётной недели.

2. В конце семестра семинарист оценивает работу каждого студента из своей группы и добавляет ему от 0 до 50 баллов в зависимости от результатов контрольных работ и коллоквиумов, работы у доски и решения домашних заданий. Итоговая сумма баллов называется "баллами за работу в семестре" (максимум 218 баллов).

3. Экзамен состоит из трёх этапов:

Первый этап проводится в случае, если студент не сдал задания до конца зачётной недели: студенту даётся не более 30 минут для ответа без подготовки любому экзаменатору для закрытия своих долгов. В случае, если долги по задачам остались, экзамен для студента прекращается с отметкой "неудовлетворительно".

Второй этап для студентов без долгов состоит из пяти блиц-вопросов по основным определениям курса, которые по каждой теме лектор даёт заранее в течение семестра. На этом этапе студент отвечает экзаменатору без подготовки. Если по итогам блица выясняется, что студент знает ответы минимум на 4 вопроса из 5, то блиц считается положительно завершённым. Если при этом баллов за работу в семестре достаточно для итоговой отметки "удовлетворительно", то по желанию студента на данном этапе экзамен для него может закончиться с получением данной отметки. Если блиц не пройден, экзамен для студента прекращается с отметкой "неудовлетворительно".

Третий этап состоит в получении билета с двумя вопросами по теории и ответа экзаменатору после часовой подготовки. Ответ на каждый вопрос из билета оценивается экзаменатором от 0 до 200 баллов, баллы суммируются к баллам за работу в семестре и выставляется итоговая оценка по принципу: "отлично" — если сумма баллов не меньше 500, "хорошо" — если сумма баллов от 300 до 499, "удовлетворительно" — если сумма баллов от 100 до 299, "неудовлетворительно" — если сумма баллов менее 100.

Программу и задания по основам
функционального анализа и теории функций
составил доцент Т. А. Ротанова