ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Лектор — Александр Анатольевич Егоров

Программа курса лекций

(2024/25 уч. год, 1-й семестр, 32 лекции, 32 семинара, экзамен)

Введение

Предпосылки возникновения математического анализа. Вехи развития математического анализа.

Множества и числа. Операции над множествами. Отображения и функции. Графики функций и их преобразования. Понятие предела. Производная и правила дифференцирования. Производные элементарных функций. Первообразная и неопределённый интеграл. Начальная таблица первообразных.

Логическая символика. Высказывания. Кванторы. Математическая индукция. Бином Ньютона. Неравенство Бернулли. Счетные множества.

1. Предел и непрерывность функций одной переменной

Вещественные числа. Аксиома полноты. Лемма о вложенных отрезках. Минимум и максимум множества. Существование точных границ. Расширенная числовая прямая. Критерий для точных границ. Принцип Архимеда.

Предел последовательности. Сходящиеся последовательности. Последовательности, стремящиеся к бесконечности. Предел и неравенство. Теорема о зажатой последовательности. Предел и ограниченность. Предел и арифметические операции. Подпоследовательности и частичные пределы. Теорема Больцано — Вейерштрасса. Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Предел функции. Предельные точки. Определение предела функции. Окрестности и проколотые окрестности. Определение предельной точки и предела на языке окрестностей. Эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши. Предельный переход в неравенстве. Предел и алгебраические операции. Предел композиции. Критерий Коши.

Асимптотические сравнения. Сравнения o-малое и O-большое. Преобразование выражений с o-малыми и O-большими. Главная часть функции. Работа с неопределенностями вида $0/0$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$. Правило Бернулли — Лопиталя.

Элементарные функции и замечательные пределы. Существование предела последовательности $(1 + x/n)^n$. Показательная функция и её свойства. Число e. Натуральный логарифм и его свойства. Степенная функция и её свойства. Тригонометрические функции. Замечательные пределы. Сравнение степенной, показательной и логарифмической функций.

Непрерывность. Классификация разрывов. Непрерывность суммы, разности, произведения, отношения, композиции. Теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях. Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях.

2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Дифференцируемые функции. Определение производной функции. Физический и геометрический смысл производной. Определение дифференциала. Геометрическая интерпретация дифференциала. Связь производной и дифференциала. Доказательства утверждений о производных из введения (дифференцирование и алгебраические операции, производная композиции и обратной функции, производные элементарных функций).

Приращения дифференцируемых функций. Локальный экстремум. Теорема Ферма о необходимых условиях экстремума. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши о приращении.

Формула Тейлора. Определение старших производных. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа и Пеано. Разложения Тейлора основных элементарных функций.

Исследование функции. Монотонность. Достаточное условие локального экстремума. Выпуклые функции. Точки перегиба. Асимптоты. Доказательство правила Бернулли — Лопиталя. Метод Ньютона.

Первообразная. Интегрирование по частям для первообразной. Замена и подстановка для первообразной. Первообразная рациональной функции. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

3. Интеграл Римана

Определение интеграла Римана и его свойства. Разбиения и интегральные суммы. Определение интеграла Римана. Суммы Дарбу. Критерий Дарбу. Критерий интегрируемости в терминах колебания функции. Необходимое условие интегрируемости. Интегрируемость непрерывной и монотонной функции. Линейность, аддитивность и монотонность интеграла. Первая теорема о среднем.

Интеграл и первообразная. Связь интеграла и первообразной. Формула Ньютона — Лейбница. Формула дифференцирования интеграла с переменными пределами. Формула Тейлора с интегральным остаточным членом.

Несобственный интеграл. Определение несобственного интеграла для бесконечной и конечной точки. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла. Интегрирование степенных особенностей. Теорема сравнения. Признаки Абеля и Дирихле. Сходимость в смысле главного значения.

Эйлеровы интегралы. Определение Г-функции и В-функции и их основные свойства. Интеграл Эйлера — Пуассона.

Приложения интеграла. Площадь криволинейной трапеции. Площадь эллипса. Объём тел вращения. Длина кривой. Площадь поверхности вращения. Независимость длины пути от параметризации. Масса и центр масс однородного стержня.

4. Числовые и функциональные ряды

Сходимость ряда. Определение ряда, частичных сумм, сходящегося ряда. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости ряда. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

Сходимость знакопостоянных рядов. Теорема сравнения для рядов. Интегральный признак сходимости. Сходимость эталонных рядов. Гармонический ряд. Признаки Коши и Даламбера.

Сходимость знакопеременных рядов. Признаки Абеля и Дирихле. Признак Лейбница.

Равномерная сходимость последовательностей. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей. Непрерывность предела функциональной последовательности. Равномерная норма.

Равномерная сходимость рядов. Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Непрерывность суммы ряда. Почленное интегрирование и дифференцирование ряда. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса. Признаки Абеля и Дирихле.

Степенные ряды. Определение степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда. Сходимость на границе области сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда. Ряд Тейлора основных элементарных функций.

Литература

Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Медведев Г. Н., Шишкин А. А. Математический анализ в вопросах и задачах.
Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и её приложения к физике.
Зельдович Я. Б., Яглом И. М. Высшая математика для начинающих физиков и техников.
Зорич В. А. Математический анализ.
Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа.
Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа.

Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу.
Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления.
Смирнов В. И. Курс высшей математики.
Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.
Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа.

План семинаров

1-ый семинар: Графики элементарных функций. Преобразования графиков.
2–3-ий семинары: Дифференцирование элементарных функций. Производная суммы, произведения и композиции.
4-ый семинары: Математическая индукция. Бином Ньютона. Счетные множества.
5-ый семинар: Верхние и нижние грани последовательностей. Определение предела последовательности. Верхние и нижние пределы.
6–7-ой семинары: Вычисление пределов последовательностей (в том числе последовательностей $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$, $\frac{a^n}{n!}$, $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$).
8-ой семинар: Определение предела функции. Непрерывность и точки разрыва.
9-ый семинар: o-малое и O-большое. Техника асимптотических разложений. Замечательные пределы.
10-11-ый семинары: Вычисление пределов функций (неопределенности 1^∞, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$. Правило Бернулли — Лопиталя.
12-ый семинар: Определение производной. Производная и дифференциал. Дифференцирование обратной, неявной и параметрически заданной функции.
13–14-ый семинар: Теорема Лагранжа. Исследование функций на монотонность и выпуклость. Неравенство Йенсена
15-ый семинары: Построение графиков функций по характеристическим точкам.
16–17-ый семинары: Производные высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Коши и Лагранжа. Приближенные вычисления значений функций.
18–19-ый семинары: Нахождение простейших неопределенных интегралов (линейность, замена переменных, интегрирование по частям)
20-ый семинар: Интегрирование рациональных функций. Простейшие иррациональности
21-ый семинар: Интегрирование тригонометрических функций.
22–23-ый семинары: Вычисление определенных интегралов. Дифференцирование интеграла с параметром.
24–25-ый семинары: Несобственный интеграл Римана. Интегралы Эйлера
25–26-ый семинары: Сходимость числовых рядов. Условная и абсолютная сходимость. Признаки Коши и Даламбера, интегральный признак, признаки Абеля и Дирихле.
26–27-ый семинары: Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Признак Вейерштрасса.
28-ой семинар: Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости.
29–30-ый семинар: Интегрируемость и дифференцируемость степенных рядов. Ряд Маклорена элементарных функций
Оставшееся время 2 семинаров распределяются на проведение проверочных работ и повторное изучение наиболее трудных тем.

Задания по основам математического анализа

1-й семестр

Задание 1 (сдать до 12 октября)

1. [8 баллов] С помощью последовательного применения элементарных преобразований построить графики функций:
(а) $f(x) = \dfrac{6x-7}{2x-3}$;
(б) $f(x) = 3x^2 + 4|x| + 5$.
2. [5 баллов] Найти производную функции

$$y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x}{2}\right) + \ln \frac{x^2+3}{\sqrt{x^4+16}} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4} + x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

3. [5 баллов] Методом математической индукции доказать неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \frac{13}{24}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

4. [6 баллов] Найти все a, для которых существует такое b, что при всех c выражение $2b^2-3ab+6ac-2c^2+b$ не положительно. Запишите условие задачи в терминах кванторов всеобщности и существования.
5. [6 баллов] Для всех $a \in \mathbb{R}$ найти точные границы последовательности

$$x_n = (-1)^{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi n}{2}\right)}(1 + a/n).$$

6. [6 баллов] Исследовать последовательность на ограниченность и монотонность и найти её предел: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}$.
7. [12 баллов] Доказать, что последовательность $x_n = \sqrt[n]{(1-(-1)^{n^2})^n + 1}$ расходится. Найти все частичные пределы последовательности.
8. [5 баллов] Используя асимптотические разложения элементарных функций, вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sqrt{1-3x^2}}{1-\cos 3x}.$$

9. [5 баллов] Используя замечательный предел, найти предел $(1+\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$ при $x \to \pi/2$.
10. [5 баллов] Используя правило Бернулли — Лопиталя, найти предел

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right).$$

Задание 2 (сдать до 7 ноября)

11. [6 баллов] Верно ли, что существуют такие числа a, b, что

$$\sin 2x = ax\cos x + b\sin x + o(x^4) \qquad \text{при } x \to 0.$$

12. [10 баллов] Подобрать функции вида $C(x-a)^\lambda$, которые лучше всего аппроксимируют функции: (а) $\operatorname{tg} x$ при $x \to \pi/2$; (б) $\ln\cos x$ при $x \to 0$.
13. [7 баллов] Доказать, что существует единственная функция $y = y(x)$, определенная для всех значений переменной x и удовлетворяющая уравнению Кеплера $y - \varepsilon\sin y = x$, $0 \le \varepsilon < 1$. Доказать,

что эта функция (бесконечно) дифференцируема. Найти её значение и все производные до третьего порядка включительно при $x = 0$.
14. [5 баллов] Определить число действительных корней уравнения

$$3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 20 = 0$$

и локализовать их (т. е. определить интервалы конечной ширины (лучше ≤ 1), в каждом из которых лежит только один корень).
15. [7 баллов] Используя теорему Лагранжа о конечных приращениях, определить наименьшее положительное число A такое, что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$e^{-\cos x}\sin x - e^{-\cos(x+1)}\sin(x+1) \le A.$$

16. [7 баллов] Множество вещественных решений уравнения $x^y = y^x$ состоит из двух кривых. Первая угадывается легко: $y = x$, вторая задается параметрически: $x = (1+t)^{1/t}$, $y = (1+t)^{1/t+1}$, $t > -1$ (при $t = 0$ значения x и y определяются как соответствующие пределы). Найти угол, под которым эти кривые пересекаются.
17. [7 баллов] Найти разложение функции $y = \cos(3x - \ln(1+2x))$ по формуле Тейлора в окрестности нуля до x^2 с остаточным членом в форме Лагранжа.
18. [8 баллов] Построить график функции

$$y = \frac{x(x-1)^2}{(x-2)^2}.$$

19. [15 баллов] Найти неопределенные интегралы
(а) $\int \dfrac{x^3\,dx}{(x^2+1)(x+1)^2}$;
(б) $\int \dfrac{dx}{(3\cos x + \sin x)^3}$;
(в) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$.

Задание 3 (сдать до 30 ноября)

20. [8 баллов] Найти интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\left(\dfrac{2^{\operatorname{arctg} x}}{(x^2+1)} + xe^{3x-2} + \sqrt[3]{2x-3}\right)dx$.
21. [5 баллов] Найти $y'(0)$, где $y(x) = \int\limits_{\sin 2x}^{x} e^{t^2}\cos(3xt)\,dt$.
22. [5 баллов] При каких значениях параметров p и q ($q > 0$) сходится несобственный интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{(x-\pi)^p \sin x}{1+x^q}\,dx$.
23. [5 баллов] Определить область существования интеграла и выразить его через интеграл Эйлера: $\int\limits_{0}^{\pi/2} \dfrac{\sin^p x}{1+\cos x}\,dx$.
24. [20 баллов] Циклоида — это кривая, заданная уравнениями $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$. Найти (а) длину одной арки циклоиды; (б) площадь под аркой; (в) объём тела, полученного вращением арки вокруг оси Ox; (г) площадь поверхности указанного тела.

Задание 4 (сдать до 30 декабря)

25. [5 баллов] Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{(n-1)(n-2)}$.
26. [5 баллов] Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx+1)}{n^p}$.
27. [5 баллов] Исследовать поточечную и равномерную сходимость на интервале $[a, +\infty)$, $a \ge 0$, последовательности $f_n(x) = (nx)^2 e^{-nx}$.

28. [5 баллов] Пользуясь признаком Вейерштрасса, исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/12}+x^2}\,\sin\frac{x}{\sqrt{n}}, \qquad x\in[-\pi,\pi].$$

29. [10 баллов] Описать область сходимости степенных рядов

(а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\pi x)^n}{(n+1)(n+2)}$;

(б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{2n^2} x^n$.

30. [10 баллов] Применяя интегрирование или дифференцирование, найти суммы рядов

(а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2x^n}{n+2}$;

(б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+2}}{n(n+2)}$.

31. [10 баллов] Разложить в ряд Маклорена функции

(а) $x\ln(\sqrt{1-x^2}-x)$;

(б) $\int\limits_0^x e^{-t^3}\,dt$.

Система оценивания по курсу «Основы математического анализа»

Итоговая оценка ставится по количеству набранных баллов за практическую часть и теоретическую часть. Практика состоит из работы на семинарах, решении ежемесячных заданий и потоковых работ. Теоретическая часть сдается на экзамене. В процентном соотношении максимальное возможное количество баллов за практику и за теорию составляет примерно 60% и 40% соответственно.

Работа на семинарах (оценивается каждым семинаристом индивидуально, мах 100 баллов).

Ежемесячные задания (31 задача, мах 228 баллов).

Потоковые работы (3 потоковых с 5+5+5=15 задач по 30 баллов за задачу, мах 450 баллов).

Теоретический экзамен (Пояснения даны ниже, мах 530 баллов).

К экзамену необходимо сдать в срок не менее половины каждого ежемесечного задания и набрать на потоковых контрольных не менее 90 баллов. Пока эти условия не выполнены студент не начинает сдавать теоретическую часть.

Экзаменационный билет состоит из трех частей:

1. Определения базовых понятий, формулировки базовых формул и базовых утверждений (4 базовых определения или факта).

2. Формулировки утверждений (теорем, лемм и т.п.) с определениями понятий, входящих в формулировки (2 утверждения).

3. Доказательство теоремы (при очной форме сдачи экзамена) или решение упражнения (при дистанционной форме сдачи экзамена) (1 доказательство или решение упражнения).

Студент отправляется на пересдачу, если он не ответил на первую часть билета, т.е. не знает хотя бы одного базового понятия, формулы или утверждения (базовые понятия, формулы и утверждения будут отмечены в списке вопросов к экзамену).

Баллы по каждой части билета следующие: 1. Определения базовых понятий, формулировки базовых формул и базовых утверждений — 120 баллов. 2. Формулировки утверждений — 160 баллов. 3. Доказательство теоремы — 250 баллов.

Можно также получить до 50 дополнительных баллов, приведя доказательство утверждения или решения упражнения по выбору экзаменатора.

Итоговая оценка: «5» $\geq$ 1080 баллов; «4» $\geq$ 770 балов; «3» $\geq$ 350 баллов.

Программу и задания
по основам математического анализа
составил доцент А. А. Егоров