В. В. Иванов

Задачи и упражнения для семинаров и домашних заданий по курсу «Математический анализ»

2. Дифференцируемые функции одной переменной

2.1. Скорость равномерного движения определяется как путь, пройденный за единицу времени. Дайте определение скорости неравномерного движения.

2.2. Угловая скорость равномерного вращения определяется как угол поворота за единицу времени. Дайте определение угловой скорости неравномерного вращения.

2.3. Сила постоянного тока определяется как количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в единицу времени. Дайте определение силы переменного тока.

2.4. Полагая $\Delta x = 0,1;\ 0,01;\ 0,001$, найдите отношение $\Delta y/\Delta x$ для функций:

(а) $y = x^2$ при $x = 1$;
(б) $y = 1/x$ при $x = 2$;
(в) $y = \sqrt{x}$ при $x = 4$.

Посчитайте предел указанного отношения при $\Delta x \to 0$ для каждой из трех функций y в произвольной точке x из области определения.

2.5. Обязана ли дифференцируемая функция быть непрерывной? Верно ли обратное? Может ли непрерывная функция иметь бесконечную производную?

2.6. Постройте пример разрывной функции, всюду имеющей производную. Что вы можете сказать о производной в точке разрыва?

2.7. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и имеет предел при $x \to +\infty$. Следует ли отсюда, что ее производная $f'(x)$ также имеет предел при $x \to +\infty$? Верно ли обратное утверждение?

2.8. Пусть функция f дифференцируема в точке x. Докажите, что последовательность $n\left[f(x + 1/n) - f(x)\right]$ имеет конечный предел при $n \to \infty$, и укажите его. Выясните, можно ли утверждать обратное, а именно — если указанный предел существует и конечен, то обязательно ли функция f дифференцируема в точке x.

2.9. Пусть при $x = x_0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ равны нулю и дифференцируемы, причем $g'(x_0) \neq 0$. Докажите, что в таком случае

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

2.10. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема при $x = a$. Докажите равенство

$$\lim_{x \to a} \frac{x\,f(a) - a\,f(x)}{x - a} = f(a) - a\,f'(a).$$

2.11. Докажите, что производная четной функции представляет собой нечетную функцию, а производная нечетной функции есть функция четная. В чем геометрический смысл этих утверждений?

2.12. Докажите, что производная периодической функции есть функция периодическая, причем с тем же периодом.

2.13. Напишите уравнения касательных к параболе $y = x^2$:

(а) в начале координат;

(б) в точке $(-2, 4)$;

(в) в точке пересечения ее с прямой $y = 3x - 2$.

2.14. Пусть вам задан график функции $y = ax^2$. Научитесь при помощи циркуля и линейки проводить касательную к этому графику в любой отмеченной его точке.

2.15. Выясните, при каком значении переменной x касательные к графикам функций $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны.

2.16. Пусть прямая $y = ax + b$ проходит через точку (x_0, y_0). Запишите уравнение нормали к этой прямой в точке (x_0, y_0). Пользуясь полученной формулой, напишите уравнения нормалей ко всем линиям и во всех точках, о которых говорилось в задачах 2.13 — 2.15.

2.17. Выясните, под каким углом пересекаются параболы $y = x^2$ и $x = y^2$. Тот же вопрос исследуйте для парабол $y = 2x^2$ и $x = 2y^2$. Обобщите ваши наблюдения.

2.18. Докажите, что два семейства гипербол

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{и} \quad xy = b$$

образуют на плоскости ортогональную сеть в том смысле, что любые две гиперболы из разных семейств пересекаются под прямым углом. Нарисуйте эту сеть.

2.19. Докажите, что функция f, определенная в некоторой окрестности точки a, дифференцируема в этой точке тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде

$$f(x) = f(a) + (x - a)\,\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ определена в той же окрестности и непрерывна при $x = a$. Чему равна производная $f'(a)$?

2.20. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема слева в точке $x = x_0$. Расширим ее до функции $F(x)$, полагая $F(x) = f(x)$ при $x \le x_0$ и $F(x) = ax + b$ при $x > x_0$. Выясните, при каких значениях параметров a и b функция $F(x)$ будет не только непрерывной, но и дифференцируемой при $x = x_0$.

Производные
элементарных функций

Выучите наизусть таблицу производных основных элементарных функций. Изучите и крепко-накрепко запомните общие правила дифференцирования. Решите сотню-другую примеров на вычисление производных элементарных функций. Вы найдете их в изобилии в любом задачнике по анализу, но можете придумать и сами. Здесь мы приведем лишь несколько задач и упражнений, чтобы обозначить уровень, который вам необходимо преодолеть в результате вашей работы.

2.21. Посчитайте производные многочленов:

$$\text{(а) } (x^2+1)^4;\ \text{(б) } (1-x)^{20};\ \text{(в) } (1+3x)^{30};\ \text{(г) } (1-x^2)^{10}.$$

2.22. Найдите красивое выражение для производной многочлена

$$p\,(x) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n).$$

Посчитайте значения $p'(k)$ для $k = 1, 2, \ldots, n$.

2.23. Посчитайте производные рациональных функций:

$$\text{(а) } \frac{ax+b}{cx+d};\quad \text{(б) } \frac{x}{x^2+1};\quad \text{(в) } \frac{1-x^3}{1+x^3};\quad \text{(г) } \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2.$$

2.24. Докажите, что производная многочлена также является многочленом, а производная любой рациональной функции есть функция рациональная. Может ли у дробно-рациональной функции производная оказаться многочленом? Может ли у нерациональной функции быть рациональная производная?

2.25. Продифференцируйте иррациональные выражения:

$$\text{(а) } \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}};\quad \text{(б) } \frac{1+x}{\sqrt{1-x}};\quad \text{(в) } \sqrt{\frac{x+1}{x-1}};\quad \text{(г) } \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$$

2.26. Для каждого натурального n определим функцию y_n, полагая

$$y_n = \sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}},$$

где корень извлекается n раз. Вычислите производные всех этих функций при $x = 0$. Ваши рассуждения будут особенно элегантными, если вы примените метод математической индукции.

2.27. Посчитайте производные выражений, содержащих тригонометрические функции:

$$\text{(а)}\ x\ \sin x + \cos x; \qquad \text{(в)}\ \frac{x}{1-\cos x}; \qquad \text{(д)}\ \sqrt{1+2\operatorname{tg} x};$$

$$\text{(б)}\ 3\sin^2 x - \sin^3 x; \qquad \text{(г)}\ \frac{x\ \sin x}{1+\cos x}; \qquad \text{(е)}\ \sin\sqrt{1+x^2}.$$

2.28. Докажите следующие простые формулы:

$$(\sin^n x\ \cos nx)' = n\,(\sin x)^{n-1}\cos\,(n+1)x,$$

$$(\sin^n x\ \sin nx)' = n\,(\sin x)^{n-1}\sin\,(n+1)x.$$

Найдите аналогичные формулы для производных функций

$$\cos^n x\ \sin nx \quad \text{и} \quad \cos^n x\ \cos nx.$$

2.29. Посчитайте производные выражений, содержащих обратные тригонометрические функции:

$$\text{(а)}\ x\ \arcsin x + \sqrt{1-x^2}; \qquad \text{(б)}\ \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right);$$

$$\text{(в)}\ \arcsin\frac{\sin\alpha\ \sin x}{1-\cos\alpha\ \sin x}; \qquad \text{(г)}\ \arccos\frac{b+a\ \cos x}{a+b\ \cos x}.$$

2.30. Угадайте, чему равны значения выражения

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

при $x \le -1$ и при $x \ge 1$. Чтобы не гадать, имеет смысл вычислить производную. Объясните ответ «элементарно-тригонометрически».

2.31. Посчитайте в уме производную $f'(1)$, если

$$f\,(x) = x + (x-1)\ \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

2.32. Посчитайте производные выражений, содержащих логарифмические функции:

$$\text{(а)}\ x^2\log_3 x; \qquad \text{(в)}\ \ln^2 x; \qquad \text{(д)}\ \ln\sin x;$$

$$\text{(б)}\ x\ \lg x; \qquad \text{(г)}\ \sqrt{\ln x}; \qquad \text{(е)}\ \ln\operatorname{tg} x.$$

2.33. Посчитайте производные выражений, содержащих показательные функции:

(а) xe^x; (б) $e^x \cos x$; (в) $\sqrt{1+e^x}$;

(г) $\sin(2^x)$; (д) $3^{\sin x}$; (е) 2^{3^x};

(ж) $e^{-a^2x^2}$; (з) e^{-x^2/a^2}; (и) e^{-a^2/x^2}.

2.34. Посчитайте производные выражений, содержащих гиперболические функции:

(а) $\ln \operatorname{ch} x$; (в) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$; (д) $\sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}} = \sqrt[4]{\dfrac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}}$;

(б) $\operatorname{th} \ln x$; (г) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x$; (е) $\dfrac{1}{2}\operatorname{th} x + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$.

2.35. Найдите производную функции $y = \ln\cos\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x$. Сравните ее с производной функции $y = \ln\operatorname{ch} x$. Объясните результат.

2.36. Применяя «логарифмическое дифференцирование», посчитайте производные следующих функций:

(а) x^x; (б) $x^{1/x}$; (в) $x^{-1/x}$; (г) $x^{\sqrt{x}}$; (д) $x^{\ln x}$; (е) $x^{\sin x}$.

2.37. Вычислите производную функции

$$y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$$

Убедившись, что производная строго больше нуля, объясните, как это можно согласовать с тем очевидным обстоятельством, что $y \to 0$, как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

2.38. Чтобы доставить себе удовольствие, продифференцируйте еще несколько «монстров»:

(а) $y = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

(б) $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$;

(в) $y = \ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

2.39. Пусть коэффициентами определителя второго порядка

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$$

служат дифференцируемые функции. Докажите, что в таком случае функция $\Delta(x)$ также дифференцируема и

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

Убедитесь, что та же самая производная может быть посчитана по формуле

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

Обобщите эти замечательные результаты на «функциональные» определители произвольного порядка.

2.40. Научившись дифференцировать, найдите компактные формулы для сумм

$$\text{(а)} \sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1}; \quad \text{(в)} \sum_{k=1}^{n} k\, \sin kx; \quad \text{(д)} \sum_{k=1}^{n} k\, \operatorname{sh} kx;$$

$$\text{(б)} \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}; \quad \text{(г)} \sum_{k=1}^{n} k\, \cos kx; \quad \text{(е)} \sum_{k=1}^{n} k\, \operatorname{ch} kx.$$

Во всех этих примерах речь идет об элементарных свойствах геометрических прогрессий, а там, где участвуют тригонометрические функции, полезно обратиться к услугам комплексной арифметики.

2.41. Докажите тождество

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}$$

и воспользуйтесь им для «вычисления» суммы

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$$

Интересно выяснить, куда стремятся рассмотренные здесь произведение и сумма, когда число сомножителей и слагаемых, равное n, неограниченно растет. Посчитайте эти пределы.

2.42. Если точка движется вдоль оси, ее скорость может быть выражена одним числом — производной пути по времени. Как называют величину, характеризующую быстроту изменения скорости? Правильно — ускорением. Для его вычисления нужно продифференцировать скорость, или, иными словами, найти вторую производную пути по времени. Может ли случиться так, что скорость всегда остается положительной, а ускорение отрицательным? Может ли скорость возрастать при условии, что ускорение убывает? Может ли скорость убывать при положительном ускорении?

2.43. Представим себе, что точка движется по графику дважды дифференцируемой функции и наблюдает за тем, как меняется направление касательной линии. Выясните, как меняется наклон касательной, если проекция точки на ось абсцисс движется с единичной скоростью. А как при этом меняется угол наклона? Еще интереснее знать, как быстро меняется угол, когда точка движется по графику с единичной скоростью. Найдите ответ на этот естественный вопрос. Формула, которая у вас получится, выражает кривизну графика. Рассмотрите несколько простых примеров и понаблюдайте, как кривизна влияет на форму графика.

2.44. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема при $x \le x_0$. Распространим ее на всю числовую прямую, полагая $F(x) = f(x)$, если $x \le x_0$, и $F(x) = a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c$, если $x > x_0$. Выясните, при каких значениях параметров a, b и c функция $F(x)$ будет дважды дифференцируемой. Сколько решений имеет эта задача? Можно ли здесь с тем же успехом обойтись линейными функциями? При каких обстоятельствах дважды дифференцируемое линейное продолжение все же возможно?

2.45. А теперь немного посчитаем. Найдите y'', если:

(а) $y = x\sqrt{1+x^2}$; (в) $y = e^{-x^2}$; (д) $y = \sin f(x)$;

(б) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$; (г) $y = x\ln x$; (е) $y = f(\sin x)$.

2.46. Найдите формулы для первой и второй производной экспоненты e^x в двух принципиально разных случаях: (а) когда перменная x независима; (б) когда x служит промежуточным агрументом.

2.47. Пусть u и v означают дважды дифференцируемые функции переменной x. Найдите вторые производные следующих функций:

(а) uv; (б) u/v; (в) ue^v; (г) $\ln\sqrt{u^2+v^2}$; (д) $\operatorname{arctg}(u/v)$.

2.48. Проверьте таблицу высших производных:

(а) если $y = e^x$, то $y^{(n)} = e^x$;

(б) если $y = \sin x$, то $y^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$;

(в) если $y = \cos x$, то $y^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$;

(г) если $y = x^\mu$, то $y^{(n)} = \mu(\mu - 1)\ldots(\mu - n + 1)\, x^{\mu - n}$;

(д) если $y = \ln x$, то $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

2.49. Пусть $F(x) = f(ax + b)$, где a и b постоянны, а f означает n раз дифференцируемую функцию. Докажите, что тогда и функция F имеет все производные до порядка n включительно, причем

$$F^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax + b).$$

2.50. Пусть $h(x) = af(x) + bg(x)$, где a и b постоянны, а функции f и g дифференцируемы n раз. Докажите, что столько же раз можно дифференцировать и функцию h, причем

$$h^{(n)}(x) = af^{(n)}(x) + bg^{(n)}(x).$$

2.51. Докажите, что произведение n-кратно дифференцируемых функций u и v также имеет производную порядка n, и она может быть посчитана по формуле Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, а C_n^k означают знакомые вам биномиальные коэффициенты. Хорошо бы найти объяснение столь поразительному сходству этого замечательного соотношения с формулой Ньютона.

2.52. Найдите выражения для производных сотого порядка следующих функций:

(а) $(x-1)(2x-1)\ldots(100x-1)$; (в) $\dfrac{x^2}{1-x}$; (д) $x \operatorname{sh} x$;

(б) $(2-x)(3-2x)\ldots(100-99x)$; (г) $\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; (е) $x \operatorname{ch} x$.

2.53. Найдите производные порядка n рациональных функций:

$$\text{(а)}\ \frac{ax+b}{cx+d};\quad \text{(б)}\ \frac{1}{x\,(1-x)};\quad \text{(в)}\ \frac{1}{x^2-3x+2}.$$

2.54. Посчитайте двухтысячные производные при $x=0$ следующих двух иррациональных функций:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\quad \text{и}\quad \frac{1}{\sqrt[3]{1+3x}}.$$

2.55. Найдите выражения для производных произвольного порядка следующих трансцендентных функций:

$$\text{(а)}\ \sin^2 x;\quad \text{(б)}\ \cos^2 x;\quad \text{(в)}\ e^x \sin x;\quad \text{(г)}\ e^x \cos x.$$

2.56. Вычислите производные всех порядков функции $y=\operatorname{arctg} x$ в точке $x=0$, воспользовавшись для этого формулой Лейбница и соотношением $(1+x^2)\,y'\equiv 1$. Решите аналогичную задачу для функций $y=\arccos x$ и $y=(\arcsin x)^2$.

2.57. Методом математической индукции докажите две любопытные формулы:

$$\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\,e^{1/x};\qquad (x^n\ln x)^{(n)}=n!\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

2.58. Постройте пример функции, которая всюду дифференцируема n раз, но в заданной точке не имеет производной порядка $n+1$.

2.59. Постройте бесконечно дифференцируемую строго возрастающую функцию, у которой в заданной точке производные всех порядков равны нулю.

Разные способы построения функций

(1) Обращение изученной функции. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в каждой точке x некоторого промежутка, причем ее производная всюду отлична от нуля, то существует однозначная обратная функция $x=f^{-1}(y)$, также определенная на некотором промежутке и дифференцируемая в каждой его точке y. При этом

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Как показывает эта формула, если производная f' дифференцируема, т. е. исходная функция f дифференцируема дважды, то и обратная функция f^{-1} имеет вторую производную:

$$(f^{-1})''(y) = -\frac{f''(f^{-1}(y))}{(f'(f^{-1}(y)))^3}.$$

2.60. Считая функцию f трижды дифференцируемой, докажите, что обратная функция f^{-1} также трех-кратно дифференцируема, и найдите выражение для ее третьей производной.

Эти рассуждения и вычисления можно продолжать и дальше, но очень скоро формулы станут настолько громоздкими, что трудно будет не сделать ошибки. Чтобы не тратить времени даром, освоим «классическую» систему обозначений, которую отличают две характерные черты: она вопиюще некорректна, но исключительно удобна.

Будем считать, что переменная y есть функция переменной x, а переменная x, в свою очередь, есть обратная функция от y. Договоримся, что y', y'' и т. д. будут означать производные y по x, а символами x', x'' и т. д. мы обозначим производные x по y. Наконец, будем помнить, что в каждом соотношении, где участвуют одновременно производные переменных y и x, они обязательно вычисляются в точках x и y, связанных изучаемой зависимостью. В этом смысле мы имеем тождество

$$x'\,y' = 1.$$

Дифференцируя его, например, по переменной y и пользуясь «цепным» правилом $(y')'_y = (y')'_x\,x'_y = y''x'$, мы приходим к новому тождеству

$$x''y' + (x')^2y'' = 0,$$

из которого легко находим x''. Дальнейшие шаги столь же просты:

$$x'''y' + 3x''x'y'' + (x')^3y''' = 0,$$

и так до бесконечности...

2.61. Попробуйте подобным же образом подифференцировать соотношение $x'\,y' = 1$ по переменной x, пользуясь цепным правилом $(x')'_x = (x')'_y\,y'_x = x''y'$. Совпадают ли новые тождества с прежними? По каким же формулам, все-таки, нужно выражать искомые производные функции x через заданные производные функции y?

2.62. Пусть пятикратно дифференцируемая функция $f(x)$ взаимно однозначна, $f(x_0) = y_0$ и $f^{(k)}(x_0) = k$, где $1 \le k \le 5$. Найдите первые пять производных функции $f^{-1}(y)$ при $y = y_0$.

2.63. Докажите, что существует единственная функция $y = y(x)$, определенная для всех значений переменной x и удовлетворяющая уравнению $y^3+3y = x$. Докажите, что эта функция бесконечно дифференцируема. Найдите ее значение и все производные до пятого порядка включительно при $x = 0$.

2.64. Такое же задание выполните для хорошо знакомого вам уравнения Кеплера $y - \varepsilon \sin y = x$, где $0 \le \varepsilon < 1$.

(2) Параметрически заданные функции. Рассмотрим две функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, определенные для всех значений параметра t из некоторого промежутка. Предположим, что первая из этих функций взаимно однозначна, так что мы можем выразить t через x по формуле $t = \varphi^{-1}(x)$, а тогда y становится функцией от x, а именно, $y = f(x)$, где $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. О функции f, построенной описанным образом, говорят, что она задана параметрически.

Предположим теперь, что обе параметризующие функции дифференцируемы, причем $\varphi'(t) \neq 0$ для всех t. Как мы уже знаем, в таком случае обратная функция $\varphi^{-1}(x)$ определена на некотором промежутке и дифференцируема в каждой его точке. Сочетая известную нам формулу для производной обратной функции с правилом дифференцирования сложной функции, мы приходим к следующему соотношению:

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

где значение параметра t определяется точкой x по формуле $t = \varphi^{-1}(x)$. Если держать в уме все отмеченные здесь обстоятельства и понимать смысл происходящего, то можно позволить себе облегчить обозначения, поднявшись до классической простоты:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Заметим, что это равенство, вместе с формулой $x = \varphi(t)$, показывает нам, что y'_x как функция от x тоже задана параметрически. Поэтому, если позволяет гладкость параметризующих функций, мы можем дифференцировать дальше. А именно, снова применяя цепное правило $(y'_t/x'_t)'_x = (y'_t/x'_t)'_t\, t'_x$, где $t'_x = 1/x'_t$, мы приходим к формуле для второй производной:

$$y''_x = \frac{y''_t\, x'_t - y'_t\, x''_t}{(x'_t)^3}.$$

2.65. Считая, что параметризующие функции трижды дифференцируемы, найдите формулу для третьей производной параметрически заданной функции.

2.66. Предположим, что обе функции переменной t, параметризующие функцию $y = f(x)$, всюду имеют отличные от нуля первые производные по t. Докажите, что тогда существует дифференцируемая обратная функция $x = f^{-1}(y)$. Выразите ее производные вплоть до третьего порядка через производные переменных x и y по связывающей их переменной t, считая параметризующие функции дифференцируемыми достаточное число раз. Если выражения для производных y по x и производных x по y подставить теперь в тождества, о которых говорилось в задаче 2.61 и перед ней, все эти тождества, разумеется, будут удовлетворены. Но интересно убедиться в этом непосредственно. Не лишайте себя этого удовольствия.

2.67. Дважды дифференцируемая функция $y = f(x)$ задана в окрестности точки $x = 0$ параметрически:

$$x = t^3 - t^2, \quad y = -t^3 + 3t - 1.$$

Найдите $f'(0)$ и $f''(0)$, если $f(0) = 1$.

2.68. Посчитайте производные y'_x, y''_x, y'''_x, если

(а) $x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3;$
(б) $x = \cos t, \quad y = \sin t;$
(в) $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$

2.69. Пусть $x = t^2 - t + 1$ и $y = t^2 + t + 1$, причем $y = 3$ при $x = 1$. Найдите производные всех порядков функции y по переменной x в точке $x = 1$.

(3) Неявно заданные функции. Пусть $y = y(x)$ означает функцию, определенную и дифференцируемую в каждой точке x некоторого промежутка и удовлетворяющую на нем уравнению $F(x, y) = 0$ в том смысле, что в пределах упомянутого промежутка выражение $F(x, y(x))$ тождественно равно нулю. Если нам известно к тому же, что $y = y_0$ при $x = x_0$, то в подавляющем числе случаев мы можем найти производную этой «неявно» заданной функции $y = y(x)$ в точке $x = x_0$. А именно, если продифференцировать тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$ по переменной x, как правило, мы получим соотношение вида

$$F_1(x, y) + F_2(x, y)\, y' \equiv 0.$$

Отсюда, если предположить, что $F_2(x_0, y_0) \neq 0$, мы находим нужную нам производную:

$$y'(x_0) = -\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}.$$

Дифференцируя дальше, если это возможно, мы придем к следующему тождеству:

$$F_{11}(x, y) + F_{12}(x, y)\, y' + (F_{21}(x, y) + F_{22}(x, y)\, y')\, y' + F_2(x, y)\, y'' \equiv 0,$$

из которого, при том же условии $F_2(x_0, y_0) \neq 0$, находим $y''(x_0)$, и так далее. Заметим, что для искомых производных мы каждый раз получаем линейное уравнение, а для его решения нам всегда приходится делить на одну и ту же величину $F_2(x_0, y_0)$. Таким образом, принятое на первом шаге условие гарантирует нам возможность совершения и всех последующих шагов.

2.70. Пусть функция $y = f(x)$ взаимно однозначна. Переход к обратной функции $x = f^{-1}(y)$ можно понимать как решение относительно переменной x уравнения $F(x, y) = 0$, где $F(x, y) = y - f(x)$. Иными словами, при вычислении производных x по y мы можем относиться к x как к обратной функции, но можем считать ее и неявной функцией, определяемой указанным уравнением. Полезно убедиться в том, что для этой ситуации оба подхода эквивалентны и приводят к одинаковым результатам.

2.71. Трижды дифференцируемая функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию $f(1) = 2$ и уравнению $F(x, y) = 0$. Найдите производные $f'(1), f''(1)$ и $f'''(1)$, если

(а) $F(x, y) = y^3 + x^3 + 2xy - y^2 + x - 10$;
(б) $F(x, y) = y^5 - 2y^3 - 4y - x - 7$;
(в) $F(x, y) = \cos(y^2 - 4) + \sin(\ln x) - y + x$.

2.72. Пусть переменные x и y связаны одним из трех условий:

(а) $y = \sqrt{25 - x^2},\ |x| < 5$;
(б) $x = 5\cos t,\ y = 5\sin t,\ 0 < t < \pi$;
(в) $x^2 + y^2 = 25,\ y > 0$.

Убедитесь, что во всех случаях получается одна и та же бесконечно дифференцируемая функция y переменной x. Найдите первые три ее прозводные при $x = 3$ и $x = 4$, пользуясь разными способами задания этой функции. В каком случае вычисления оказались наиболее простыми? Заметьте, что сужение функции на интервал $(0, 5)$ инволютивно — обратная функция тождественна исходной. Не нашло ли это отражения в результатах ваших вычислений?

Теорема Лагранжа,
или формула конечных приращений

2.73. На линии $y = x^3$ найдите все точки, в которых касательные параллельны хорде, соединяющей точки $(-1, -1)$ и $(2, 8)$.

2.74. Докажите, что если у вещественного многочлена $P(x)$ степени n все корни вещественны и просты, то этим же свойством обладают его производные $P'(x)$, $P''(x), \ldots, P^{(n-1)}(x)$.

2.75. Опишите все функции на заданном промежутке, у которых:

(а) первая производная всюду равна нулю;

(б) вторая производная всюду равна нулю;

(в) первая производная постоянна;

(г) вторая производная равна первой.

2.76. Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема на всей числовой прямой, причем для всех x и h справедливо тождество:

$$f(x+h) - f(x) \equiv h\, f'(x).$$

Докажите, что функция $f(x)$ линейна. Убедитесь в справедливости и обратного утверждения.

2.77. Пусть функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема на всей числовой прямой. Докажите, что если

$$f(x+h) - f(x) \equiv h\, f'\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

для всех x и h, то функция $f(x)$ представляет собой многочлен степени не выше двух. Легко проверить, что справедливо и обратное утверждение.

2.78. Пусть $0 < a < b$. Докажите неравенства:

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

2.79. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке и дифференцируема в каждой его внутренней точке c, причем $|f'(c)| \leq M$ для всех c одновременно. Докажите, что в таком случае для любых точек x_1 и x_2 данного промежутка справедливо неравенство:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M\,|x_2 - x_1|.$$

Иначе говоря, функция, имеющая ограниченную производную, удовлетворяет условию Липшица.

2.80. Докажите неравенства:

(а) $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$; (в) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \le |x-y|$;

(б) $|\cos x - \cos y| \le |x-y|$; (г) $|\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y| \le |x-y|$;

2.81. Выясните, как связаны между собой функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad \text{и} \quad g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}.$$

Не забывайте, что в подобных случаях бывает полезно прежде сравнить производные.

2.82. Опишите максимальные участки монотонности основных элементарных функций: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных к ним.

2.83. Пусть функции f и g дифференцируемы в окрестности точки x_0, причем $f(x_0) = g(x_0)$. Докажите следующие два утверждения:

(а) если $f'(x) > g'(x)$ при $x > x_0$, то и $f(x) > g(x)$ при $x > x_0$;

(б) если $f'(x) > g'(x)$ при $x < x_0$, то $f(x) < g(x)$ при $x < x_0$.

2.84. Докажите неравенства:

(а) $e^x > 1 + x$ при $x \ne 0$;

(б) $x - x^2/2 < \ln(1+x) < x$ при $x > 0$;

(в) $x - x^3/6 < \sin x < x$ при $x > 0$;

(г) $\operatorname{tg} x > x + x^3/3$ при $0 < x < \pi/2$.

2.85. Опишите максимальные участки выпуклости основных элементарных функций. Привлекая результаты, полученные вами при решении задачи 2.82, постройте правильные графики этих функций.

2.86. Пусть $x > 0$ и $y > 0$, причем $x \ne y$. Докажите неравенства:

$$\text{(а)}\ \frac{x^\alpha + y^\alpha}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha, \quad \text{где} \quad \alpha > 1;$$

$$\text{(б)}\ \frac{x\ln x + y\ln y}{x+y} > \ln\frac{x+y}{2}.$$

2.87. Докажите, что график дифференцируемой выпуклой функции располагается целиком с одной стороны от любой своей касательной, а именно: над ней, если функция выпукла вниз, и под нею в случае, когда функция выпукла вверх.

2.88. Выясните геометрический смысл неравенства Бернулли:

$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x, \quad \text{где} \quad \alpha > 1,\ x > -1,\ x \ne 0.$$

2.89. Докажите, что характер выпуклости функции не изменится, если к ней прибавить произвольную линейную функцию.

2.90. Докажите, что если выпуклая функция имеет горизонтальную или наклонную асимптоту, ее график целиком расположен с одной стороны от асимптоты, а именно: выше, если функция выпукла вниз, и ниже в том случае, когда функция выпукла вверх.

2.91. Докажите, что у любой достаточно гладкой функции переменной x, имеющей общую асимптоту при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$, обязательно есть по крайней мере две точки перегиба. Докажите, что третья производная такой функции хотя бы в одной точке равна нулю.

2.92. Докажите, что если график функции, удовлетворяющей условиям предыдущей задачи, на бесконечностях разных знаков подходит к асимптоте с разных сторон, то функция имеет не менее трех точек перегиба. Докажите, что в этом случае четвертая производная функции хотя бы в одной точке равна нулю.

Экстремумы дифференцируемых функций

2.93. Найдите и исследуйте все точки локального экстремума следующих функций:

(а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$; (г) $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$;

(б) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$; (д) $y = \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1 + x^2}$;

(в) $y = \sqrt{2x - x^2}$; (е) $y = |x|\, e^{-|x-1|}$.

2.94. Выясните, какие корни многочлена

$$p\,(x) = (x-1)(x-2)^2 \ldots (x-n)^n$$

являются точками локального экстремума, а какие — точками перегиба. Укажите вид графика многочлена p вблизи его корней.

2.95. Найдите наименьшие и наибольшие значения функций:

(а) $x^2 - 4x + 6$, $-3 \le x \le 10$; (в) $x + 1/x$, $0,01 \le x \le 100$;

(б) $|x^2 - 3x + 2|$, $|x| \le 10$; (г) $\sqrt{5 - 4x}$, $|x| \le 1$.

2.96. Найдите точные границы значений функции $f(x)$ на интервале $0 < x < +\infty$, если:

$$\text{(а) } f(x) = xe^{-0{,}01x}; \quad \text{(б) } f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}; \quad \text{(в) } f(x) = e^{-x}\cos x.$$

Опишите все значения, которые принимают эти функции на указанном интервале.

2.97. Укажите наибольшие элементы следующих трех последовательностей:

$$\text{(а) } \frac{n^{10}}{2^n}; \qquad \text{(б) } \frac{\sqrt{n}}{n+10000}; \qquad \text{(в) } \sqrt[n]{n}.$$

2.98. Определите число вещественных корней следующих уравнений и локализуйте эти корни:

$$\text{(а) } x^3 - 6x^2 + 9x = 10; \qquad \text{(в) } 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x = 20;$$

$$\text{(б) } x^3 - 3x^2 - 9x = h; \qquad \text{(г) } x^5 - 5x = a.$$

2.99. Выясните, в каких системах логарифмов существуют числа, равные своему логарифму.

2.100. Расмотрим два замечательных числа: e^π и π^e. Выясните, не пользуясь калькулятором, какое из них больше.

2.101. Среди всех прямоугольников данной площади найдите тот, у которого периметр наименьший.

2.102. Среди всех прямоугольников данного периметра найдите тот, у которого площадь наибольшая.

2.103. В эллипс с заданными полуосями впишите прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, который имеет наибольшую площадь.

2.104. Около данного шара опишите конус наименьшего объема.

2.105. Среди конусов с заданной образующей найдите тот, у которого наибольший объем.

2.106. Проведите касательную к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

образующую с осями координат треугольник наименьшей площади.

2.107. Какой сектор следует вырезать из круга заданного радиуса, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости? Не встречалась ли вам уже эта задача?

2.108. На какой высоте над центром квадратного столика следует укрепить электрическую лампочку, чтобы освещенность углов столика была максимальной? А если столик прямоугольный?

2.109. Завод A отстоит от железной дороги на a *км*. Дорога идет с юга на север и проходит через город B, расположенный на b *км* южнее завода. Ваша задача — так построить подъездной путь от завода A к железной дороге, чтобы даставка грузов в город B была наиболее экономной. Известно, что стоимость провоза тонны груза на расстоянии 1 *км* по подъездному пути составляет p рублей, а по железной дороге q рублей, причем $p > q$. Не будет ли выгодней проложить подъездной путь прямо от завода до города?

Правила Бернулли — Лопиталя

Пусть x_0 означает точку числовой прямой или один из символов $+\infty$ и $-\infty$. Пусть во всех других близких к x_0 точках x функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы, причем $g'(x) \neq 0$. Заметим, что последнее условие, как вытекает из теоремы Ролля, гарантирует неравенство нулю и самой функции $g(x)$ для всех точек $x \neq x_0$, достаточно близких к x_0. Таким образом, мы вправе поставить вопрос о вычислении пределов двух отношений:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Предположим, что существует второй из указанных пределов, причем он может быть как конечным, так и бесконечным. Есть две часто встречающиеся ситуации, когда можно утверждать, что тогда автоматически существует и первый из этих пределов, причем равный второму. Первое правило Бернулли — Лопиталя утверждает, что это действительно так, если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малы при $x \to x_0$. Второе правило Бернулли — Лопиталя гарантирует справедливость того же вывода в том случае, когда функция $g(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$. При этом не имеет значения, как ведет себя функция $f(x)$, хотя обычно второе правило применяют к вычислению предела отношения двух бесконечно больших переменных величин.

В приводимых ниже примерах ваша задача — определить возможность применения того или иного из указанных выше «правил» и вы-

числить соответствующие пределы. Некоторые из них легко — а иногда и легче — посчитать другими методами. Сравнивайте при каждой возможности разные подходы к делу, отмечайте лучшие и стремитесь к совершенству. Только так достигается профессионализм.

2.110. Найдите пределы отношений бесконечно малых:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{2x^3-x-1};\qquad \text{(б)}\ \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+4x-7}{2x^2-5x-3};$$

$$\text{(в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3};\qquad \text{(г)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x};$$

2.111. Найдите пределы отношений бесконечно больших:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+4x-7}{2x^2-5x-3};\qquad \text{(б)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}};$$

$$\text{(в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 3x};\qquad \text{(г)}\ \lim_{x\to \pi/2}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}.$$

2.112. Кое-где в предыдущих примерах вам, возможно, пришлось дважды применить правило Бернулли — Лопиталя. Иногда бывает и этого недостаточно. Выполните еще несколько подобных упражнений:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x^3+2x-1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2};\qquad \text{(в)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x^{100}}{e^{0{,}01x}};$$

$$\text{(б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}{x^3};\qquad \text{(г)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}.$$

2.113. Преобразуя произведение бесконечно малой и бесконечно большой к «неопределенности» вида $0:0$ или $\infty:\infty$, а также сочетая правила Бернулли — Лопиталя с выгодными преобразованиями выражений и заменой сложных множителей эквивалентными простыми, посчитайте еще несколько пределов:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to +0}x^{\varepsilon}\ln x\ \ (\varepsilon>0);\qquad \text{(б)}\ \lim_{x\to 1-0}(\ln x)\,\ln(1-x);$$

$$\text{(в)}\ \lim_{x\to +0}\sin x\ln\operatorname{ctg}x;\qquad \text{(г)}\ \lim_{x\to +\infty}x\left(\pi-2\arcsin\left(x/\sqrt{1+x^2}\right)\right).$$

2.114. Предыдущие советы полезны и при вычислении предела разности двух бесконечно больших переменных величин:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right);\ \text{(б)}\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right);\ \text{(в)}\ \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right).$$

2.115. Для исследования неопределенностей вида 0^0 полезен переход к логарифмам. Учитывая это замечание, найдите пределы:

$$\text{(а)} \lim_{x\to+0} x^x; \qquad \text{(б)} \lim_{x\to+0} x^{x^x-1}.$$

2.116. Предыдущая подсказка может принести пользу и при изучении выражений вида ∞^0. Убедитесь в этом, вычислив следующие пределы:

$$\text{(а)} \lim_{x\to0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}; \quad \text{(б)} \lim_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x; \quad \text{(в)} \lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}.$$

2.117. Нередко встречаются также неопределенности вида 1^∞. Вы уже знаете, как с ними бороться. Решите несколько упражнений и на эту тему:

$$\text{(а)} \lim_{x\to1} x^{1/(1-x)}; \qquad \text{(б)} \lim_{x\to1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}; \qquad \text{(в)} \lim_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$\text{(г)} \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}; \quad \text{(д)} \lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}; \qquad \text{(е)} \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}.$$

2.118. Пусть функция f имеет в точке x вторую производную. Докажите, что тогда

$$f''(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$

2.119. Пусть функция f имеет в точке x третью производную. Докажите существование следующего предела и найдите его:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3}.$$

2.120. Интересно, что правила Бернулли — Лопиталя, позволяющие порой решать довольно хитрые задачи, в иных простейших случаях оказываются бессильными. Рассмотрите с этой точки зрения следующий предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}.$$

Между прочим, этот пример показывает, что второе из обсуждаемых правил не допускает обращения — из существования предела отношения самих функций не вытекает существования предела отношения их производных. Приведите пример, показывающий, что так же обстоят дела и с первым правилом.

2.121. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы n раз в точке $x = x_0$, причем значения этих функций и все их производные до порядка $n-1$ включительно в данной точке равны нулю, но $\psi^{(n)}(x_0) \neq 0$. Докажите, что в таком случае

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{\psi^{(n)}(x_0)}.$$

2.122. Пусть функция $r(x)$ дифференцируема n раз при $x = x_0$, причем $r^{(k)}(x_0) = 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n$. Сравнив эту функцию со степенью $(x - x_0)^n$ и применив предыдущее утверждение, докажите, что $r(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

2.123. Пусть функции $f(x)$ и $P(x)$ дифференцируемы n раз при $x = x_0$, причем $f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(x_0)$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n$. Опираясь на утверждение предыдущей задачи, убедитесь в том, что

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

2.124. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз при $x = x_0$. Убедитесь, что многочлен $P(x)$, заданный формулой

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k, \quad \text{где} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

имеет при $x = x_0$ то же значение и те же производные вплоть до порядка n, что и функция $f(x)$.

2.125. Учитывая две последние задачи, докажите, что любая функция $f(x)$, дифференцируемая n раз при $x = x_0$, может быть записана в следующей асимптотической форме:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

где коэффициенты a_k определяются равенствами

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \ \ldots \ , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Это и есть так называемая «локальная» формула Тейлора, представляющая собой важнейший инструмент асимптотического анализа

дифференцируемых функций. Разлагая сколь угодно сложную функцию в сумму многочлена и бесконечно малой высокого порядка, мы получаем возможность в мельчайших деталях изучить устройство функции вблизи интересующей нас точки.

2.126. Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ производную порядка $n+1$, степень малости остаточного слагаемого в формуле Тейлора можно уточнить. А именно, продолжая разложение еще на один шаг и представляя изучаемый остаток в виде суммы последних двух слагаемых нового разложения, убедитесь, что его порядок относительно переменной $x - x_0$ не меньше $n+1$. Таким образом,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + O\left((x - x_0)^{n+1}\right).$$

2.127. Разложите многочлен $1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ по степеням переменной $x + 1$ двумя способами: непосредственными алгебраическими преобразованиями и с помощью формулы Тейлора. Сравните ответы.

2.128. Найдите первые три члена разложения функции $\sqrt{x}$ по неотрицательным степеням переменной $x - 1$. Укажите порядок остатка.

2.129. Разложите функцию x^x по неотрицательным степеням бинома $x - 1$ вплоть до второй его степени. Укажите порядок остатка.

2.130. Функцию $\operatorname{ch} x$ в окрестности точки $x = 0$ замените с максимально возможной точностью параболой второго порядка.

2.131. Считая $x > 0$, разложите функцию $\sqrt{1 + x^2} - x$ по целым неотрицательным степеням переменной $1/x$ до третьей степени включительно.

Полагая в формуле Тейлора $x_0 = 0$ и считая функцию $f(x)$ дифференцируемой $n+1$ раз при $x = 0$, мы получаем разложение этой функции по степеням ее переменной:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O\left(x^{n+1}\right).$$

2.132. Докажите, что у нечетной функции в ее разложении участвуют только нечетные степени переменной, а у четной — четные.

2.133. Считая функцию бесконечно дифференцируемой, оцените порядок остатка в ее разложении по степеням переменной, если:

(а) функция нечетная и разложение ведется до порядка $2n - 1$;

(б) функция четная, а разложение записано до порядка $2n$.

2.134. Проверьте самостоятельно и выучите наизусть следующую таблицу основных разложений:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O\left(x^{n+1}\right);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O\left(x^{2n+1}\right);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + O\left(x^{2n+2}\right);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O\left(x^{n+1}\right);$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!} + O\left(x^{n+1}\right).$$

Опираясь на эти базовые формулы, можно получить разложение любой элементарной функции до любого желаемого порядка, причем уже не вычисляя производных в исследуемой точке, как этого требует непосредственное применение формулы Тейлора, а совершая лишь простые алгебраические преобразования и решая системы линейных уравнений. Об этом и пойдет речь в следующем разделе.

Техника асимптотических разложений

Для простоты мы будем говорить лишь о бесконечно дифференцируемых функциях. Таким образом, нам заранее известно, что все они, подобно элементарным функциям, допускают асимптотические разложения любого порядка.

2.135. Пусть функция $f(x)$ допускает разложение вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + O\left(x^{n+1}\right).$$

Докажите, что тогда для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ коэффициенты a_k в этом разложении определяются формулами

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad \text{или} \quad f^{(k)}(0) = k!\, a_k.$$

Теперь мы знаем, что асимптотическое разложение заданного порядка для каждой функции только одно. С другой стороны, указанные формулы позволяют нам вычислять производные функции в нуле, если мы каким-то способом смогли разложить функцию по степеням ее переменной.

2.136. Пользуясь школьной формулой для суммы конечной геометрической прогрессии, найдите разложения произвольного порядка следующих рациональных функций:

$$\text{(а)}\ \frac{1}{1-x};\quad \text{(б)}\ \frac{1}{1+x};\quad \text{(в)}\ \frac{1}{1-x^2};\quad \text{(г)}\ \frac{1}{1+x^2}.$$

Для каждой из этих функций посчитайте все ее производные в нуле.

2.137. Найдите компактные выражения для коэффициентов разложений следующих иррациональных функций:

$$\text{(а)}\ \frac{1}{\sqrt{1+x}};\quad \text{(б)}\frac{1}{\sqrt{1-x}};\quad \text{(в)}\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\quad \text{(г)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Посчитайте при $x=0$ производные этих функций всех порядков.

2.138. Предположим, что масса m как функция скорости v выражается формулой:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

где m_0 и c — некоторые постоянные. Разложите m по степеням v до четвертого порядка.

Предположим, что для функций $f(x)$ и $g(x)$ мы нашли их разложения порядка n по степеням независимой переменной:

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+O(x^{n+1}),$$
$$g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+O(x^{n+1}).$$

Тогда разложения суммы и разности этих функций, очевидно, имеют следующий вид:

$$f(x)\pm g(x)=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+\ldots+(a_n\pm b_m)x^n+O(x^{n+1}).$$

2.139. Пользуясь известным разложением экспоненты, разложите гиперболические синус и косинус.

2.140. Применяя элементарные преобразования и уже известные вам асимптотические формулы, найдите разложения произвольного порядка следующих функций:

$$\text{(а)}\ \frac{x^2+5}{x^2+x-12};\quad \text{(б)}\ \frac{1}{x^4-3x^2-4};\quad \text{(в)}\ \ln\frac{3+x}{2-x}.$$

2.141. Понижая степени предлагаемых ниже трех тригонометрических многочленов, найдите их разложения произвольного порядка:

$$\text{(а)}\ \sin^2 x\,\cos^2 x; \qquad \text{(б)}\ \sin^3 x; \qquad \text{(в)}\ \cos^3 x.$$

Для разложения произведения рассмотренных выше функций $f\,(x)$ и $g\,(x)$ достаточно перемножить соответствующие асимптотические формулы, привести подобные, а все слагаемы порядка не ниже $n+1$ собрать в единый остаток. Результат будет выглядеть следующим образом:

$$f\,(x)\,g\,(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + O\,(x^{n+1}),$$

где коэффициенты c_k определяются равенствами

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0\,b_0, \\ c_1 &= a_0\,b_1 + a_1\,b_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= a_0\,b_n + a_1\,b_{n-1} + \ldots + a_n\,b_0. \end{aligned}$$

2.142. Найдите асимптотическое разложение максимального порядка для произведения $f\,(x)\,g\,(x)$, если сомножители имеют вид:

$$\text{(а)}\ f\,(x) = 1 + 2x^2 - x^4 + O\,(x^5), \quad g\,(x) = 1 - x^3 + O\,(x^4);$$

$$\text{(б)}\ f\,(x) = 1 - 2x^2 + x^3 + O\,(x^4), \quad g\,(x) = x - x^3 + O\,(x^5).$$

2.143. Найдите разложения до x^4 следующих функций:

$$\text{(а)}\ (x+5)\,e^{2x}; \quad \text{(б)}\ e^x \ln\,(1+x^2); \quad \text{(в)}\ \frac{(1+x^2)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}.$$

Возвращаясь к нашим функциям $f\,(x)$ и $g\,(x)$, чьи разложения указаны выше, предположим, что начальный коэффициент b_0 второй из них отличен от нуля. Тогда, разумеется, и $g\,(x) \neq 0$ для всех достаточно малых значений x, так что вблизи нуля отношение $f\,(x)/g\,(x)$ определено и представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию. Поэтому его можно записать в виде

$$\frac{f\,(x)}{g\,(x)} = d_0 + d_1 x + \ldots + d_n x^n + O\,(x^{n+1}).$$

Чтобы найти коэффициенты этого разложения, мы умножим последнее равенство слева на $g\,(x)$, а справа — на ту же функцию, только представленную своим разложением. Перемножать асимптотические

формулы мы уже умеем, так что легко придем к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&a_0 = b_0\, d_0,\\
&a_1 = b_0\, d_1 + b_1\, d_0,\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_n = b_0\, d_n + b_1\, d_{n-1} + \ldots + b_n\, d_0.
\end{aligned}$$

Из этой простой системы линейных относительно $d_0, d_1, \ldots, d_n$ уравнений, имеющей наиболее удобную для вычислений «треугольную» форму, мы последовательно определяем все коэффициенты изучаемого разложения. Заметим, что каждый раз нам придется делить на $b_0 \neq 0$, и система, как и следовало ожидать, однозначно разрешима.

2.144. Найдите асимптотическое разложение максимального порядка для дроби $f(x)/g(x)$, если ее числитель и знаменатель имеют вид:

$$\text{(а)}\ f(x) = 1 - x^2 + O(x^4), \quad g(x) = 1 - x^3 + O(x^5);$$

$$\text{(б)}\ f(x) = x + x^2 + O(x^4), \quad g(x) = x + x^3 + O(x^5).$$

$$\text{(в)}\ f(x) = x + x^2 + O(x^5), \quad g(x) = x + x^3 + O(x^4).$$

2.145. Найдите разложения пятого порядка следующих трех трансцендентных функций:

$$\text{(а)}\ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \text{(б)}\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \quad \text{(в)}\ \frac{x}{e^x - 1}.$$

2.146. Подберите коэффициенты A, B, C и D так, чтобы экспонента оказалась представленной в виде

$$e^x = \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} + O(x^5).$$

Чтобы найти разложение сложной функции $\psi(\varphi(x))$, где

$$\varphi(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + O(x^{n+1}),$$

$$\psi(y) = \beta_0 \ + \ \beta_1 y^1 + \ldots + \beta_n y^n + O(y^{n+1}),$$

достаточно в правую часть второй формулы вместо y всюду подставить правую часть первой формулы и упростить получившуюся конечную сумму. При этом $O(y^{n+1})$, очевидно, превращается по крайней мере в $O(x^{n+1})$. В тех нередких случаях, когда разложение «внутренней» функции $\varphi(x)$ начинается с более высокой степени переменной

x, большая часть разложения функции $\psi(y)$ окажется невостребованной, поскольку после указанной замены будет иметь относительно x степень выше n и вся перейдет в новый остаток. Этим замечанием не следует пренебрегать, если вы хотите сэкономить свои силы и время.

2.147. Найдите разложения следующих элементарных функций:

(а) $\ln(1+\arcsin x)$ – до x^3; (б) $\sqrt{\cos x}$ – до x^4;

(в) $(1+x)^{\sin x}$ – до x^5; (г) $\sqrt[3]{\sin x^3}$ – до x^{15};

(д) $\ln\cos x$ – до x^6; (е) $\ln\operatorname{ch} x$ – до x^6.

Полезно иметь в виду, что если мы знаем значение функции $f(x)$ при $x=0$ и разложение ее производной $f'(x)$ по степеням переменной до x^{n-1}, мы можем сразу записать разложение самой функции до x^n. А именно, если $f(0)=a_0$ и

$$f'(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{n-1}x^{n-1} + O(x^n),$$

то, как непосредственно вытекает из сравнения тейлоровских формул, записанных для исходной функции и ее производной,

$$f(x) = a_0 + A_0 x + A_1\frac{x^2}{2} + \ldots A_{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}).$$

2.148. Опираясь на результаты, полученные вами при решении задач 2.136 и 2.137, найдите асимптотические формулы произвольного порядка для обратных тригонометрических функций:

(а) $\arcsin x$; (б) $\arccos x$; (в) $\operatorname{arctg} x$; (г) $\operatorname{arcctg} x$.

2.149. Найдите асимптотическое разложение произвольного порядка хорошо знакомой вам функции

$$y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$$

2.150. Используя изученные вами методы асимптотических разложений, найдите пределы:

(а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$; (б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; (г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

2.151. В следующих примерах необходимо прежде определить порядок бесконечно малого знаменателя, а затем, разлагая числитель, вычислить предел:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x/2)-\sqrt{1+\sin x}+1}{\operatorname{sh} x-\operatorname{arctg} x};$$

$$\text{(б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+\cos 2x}-e^{\operatorname{tg} x}+2x^2}{2\sin x-2\,\ln(1+x)-x^2}.$$

$$\text{(в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\ln(1-\sin x)-1}{\sqrt[3]{8-x^4}-2};$$

2.152. Посчитайте еще несколько пределов, когда аргумент стремится к бесконечности:

$$\text{(а)}\ \lim_{x\to\infty}\left(e^{1/x}(x^2-x+2)-\sqrt{x^4+x^2+1}\right);$$

$$\text{(б)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}\left(1-\frac{x^2+1}{x}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right);$$

$$\text{(в)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+x^2+1}{x^4-x^2+1}\right)^{x^4\sin^2(1/x)}.$$

Подобных примеров можно привести тысячи, и ни один из них теперь не должен быть для вас проблемой.

Построение графиков

Чтобы построить правильный и красивый график, нужно провести обстоятельное изучение определяющей его функции. Прежде всего необходимо описать область ее определения. Обычно эта область представляет собой объединение нескольких числовых промежутков. Полезно сразу отметить специфические черты функции вроде четности или нечетности. Четность функции проявляется в симметричности ее графика относительно оси ординат, нечетность означает симметричность относительно начала координат. Иногда график бывает симметричным относительно какой-либо другой вертикали или точки. Посмотрите, нет ли у функции периода. Полезно отметить пересечения графика с осями координат, если они есть, а также выяснить, где

график выше оси абсцисс, а где ниже. Далее мы отмечаем все точки, где функция или график терпят разрыв. Следует указать и точки, где нет производной или же она бесконечна. В результате некоторые промежутки, входившие в состав области определения, могут оказаться разбитыми на более мелкие части. На каждом «хорошем» промежутке мы вычисляем первую и вторую производные и определяем с их помощью участки монотонности, точки экстремума, участки выпуклости и точки перегиба. Наконец, необходимо провести исследование функции в каждой граничной точке области ее определения, а также в особых точках, где нарушается непрерывность или дифференцируемость. А именно, если речь идет о «конечной» точке прямой, нужно посмотреть, есть ли у функции предел. Если он есть и бесконечен, мы имеем вертикальную асимптоту. Если же предел конечен, нужно его посчитать, а кроме того — выяснить, с каким наклоном график входит в соответствующую точку плоскости. Если же граничной точкой служит бесконечность того или иного знака, мы выясняем, есть ли у функции горизонтальная или наклонная асимптота. В случае ее существования хорошо бы еще узнать, как график функции расположен относительно этой асимптоты. Если вы проведете исследование по описанной схеме — а для этого вы теперь располагаете всеми необходимыми средствами, — ваш график будет произведением искусства.

2.153. Постройте графики многочленов:

(а) $y = 3x - x^3$; (б) $y = 1 + x^2 - x^4/2$;

(в) $y = (x^2 - 1)^3$; (г) $y = (x - 1)^3(x + 1)^2$.

2.154. Постройте графики рациональных функций:

(а) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; (в) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; (д) $y = \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^4$;

(б) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$; (г) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$; (е) $y = \dfrac{x^3}{2(x + 1)^2}$.

2.155. Постройте графики иррациональных функций:

(а) $y = \sqrt[3]{(x + 1)^2 + (x - 1)^2}$; (в) $y = \sqrt{\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2}{3x}}$;

(б) $y = \sqrt[3]{(x + 2)^2 - (x - 2)^2}$; (г) $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{x^3}{x - 2}}$.

2.156. Постройте графики тригонометрических многочленов:

$$\text{(а) } y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x; \qquad \text{(б) } y = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x.$$

2.157. Постройте еще два симпатичных графика, определяемых обратными тригонометрическими функциями:

$$\text{(а) } y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}; \qquad \text{(б) } \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

2.158. Постройте графики следующих трансцендентных функций:

$$\text{(а) } y = x\ln x; \qquad \text{(в) } y = x^x; \qquad \text{(д) } y = \sqrt[3]{x^2}\,e^{-x};$$

$$\text{(б) } y = \frac{\ln x}{x}; \qquad \text{(г) } y = x^{1/x}; \qquad \text{(е) } y = (x+2)\,e^{1/x}.$$

При построении линий, заданных параметрически, т. е. уравнениями вида $x = x(t), y = y(t)$, целесообразно предварительно изучить зависимость координат x и y от параметра t и построить вспомогательные два графика. Затем область значений параметра t разбивается на несколько участков, на каждом из которых изучаемые уравнения определяют функции $y = y(x)$ или $x = x(y)$. Далее эти функции исследуются по обычной схеме с той лишь разницей, что их производные выражаются через параметр t.

2.159. Нарисуйте линии, заданные параметрически:

$$\text{(а) } x = 2t - t^2, \qquad y = 3t - t^3;$$

$$\text{(б) } x = t + e^{-t}, \qquad y = 2t - e^{-2t};$$

$$\text{(в) } x = \sin 2t, \qquad y = \sin 3t.$$

2.160. Нарисуйте линии, заданные в полярных координатах:

$$\text{(а) } \varrho = 1 + 2\cos\varphi; \qquad \text{(б) } \varrho = \sin 3\varphi.$$

2.161. Нарисуйте линии, заданные алгебраическими уравнениями:

$$\text{(а) } x^3 + y^3 = 3xy; \quad \text{(б) } x^2 + y^2 = x^4 + y^4; \quad \text{(в) } x^2y^2 = x^3 - y^3.$$

В подобных случаях часто бывает полезно изучить, как незнакомая нам линия пересекается с лучами, выходящими из начала координат. Иными словами, полагая $y = tx$, попробуйте найти координаты точек

персечения луча наклона t с интересующей вас линией. Если получится, то линия окажется представленой в параметрической форме, а что делать дальше — вы уже знаете. Впрочем, иногда выгоднее просто перейти к полярным координатам.

Дифференциалы, или принцип линейности бесконечно малых приращений

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на некотором числовом промежутке, фиксируем точку x и рассмотрим новую функцию Δy новой переменной Δx, полагая

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Величину Δy называют приращением функции y в точке x, отвечающем приращению Δx исходного аргумента.

2.162. По заданному графику функции y переменной x постройте график функции Δy переменной Δx.

Например, если $y = A\,x + b$, то $\Delta y = A\,\Delta x$. Как мы видим, в данном случае функция Δy линейно зависит от своей переменной Δx, причем она одна и та же для всех точек x. В общем случае характер зависимости приращения Δy изучаемой функции от приращения Δx ее аргумента определяется выбранной точкой x, и зависимость эта нелинейна. Между тем, сколь бы сложной ни была наша функция, как правило, ее приращение «в малом» все же почти линейно. Обсудим подробнее этот принципиально важный вопрос.

Будем говорить, что функция Δy почти линейно зависит от Δx, или, иными словами, допускает выделение линейной части, если она может быть представлена в виде

$$\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x),$$

где A означает некоторую величину, не зависящую от Δx, хотя она может изменяться при переходе от одной точки x к другой, а символ $o(\Delta x)$, как мы знаем, выражает такую переменную величину, которая не просто стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, но бесконечно мала даже по сравнению с Δx, а именно:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

При этом линейную часть $A\,\Delta x$ приращения Δy называют дифференциалом функции y в точке x и обозначают символом dy. Подчеркнем, что выражение dy обретает конкретный смысл, когда указана точка x, и представляет собой не число, а линейную функцию переменнной Δx, действующую по формуле:

$$dy = A\,\Delta x.$$

Таким образом, в новых обозначениях приращение Δy может быть записано в следующей симпатичной форме:

$$\Delta y = dy + o\,(\Delta x).$$

2.163. Для функции $y = x^3 - 2x + 1$ непосредственно посчитайте приращение Δy и определите его линейную часть при условии, что $x = 1$. Сравните значения найденных вами двух функций от Δx при:

$$\text{(а) } \Delta x = 1; \quad \text{(б) } \Delta x = 0,1; \quad \text{(в) } \Delta x = 0,01.$$

На этом простом примере понаблюдайте, как меняется точность приближенной формулы $\Delta y \approx dy$ при уменьшении Δx.

2.164. Пусть уравнение движения задается формулой $s = 5t^2$, выражающей путь s, пройденный за время t. Как в механике называют такого типа даижения? Для момента времени $t = 2$ определите приращение пути Δs и дифференциал пути ds. Сравните их значения для

$$\text{(а) } \Delta t = 1; \quad \text{(б) } \Delta t = 0,1; \quad \text{(в) } \Delta t = 0,01, \quad \text{(г) } \Delta t = 0,001.$$

Эти и многие другие примеры показывают, что дифференциал — крайне полезная вещь, а значит, имеет смысл выяснить, какие функции обладают дифференциалами. Ответ оказывается очень простым и приятным.

2.165. Докажите, что приращение функции $y = f\,(x)$ в точке x почти линейно зависит от Δx тогда и только тогда, когда функция y имеет конечную производную в точке x. Докажите, что при этом роль коэффициента A выполняет производная $f'(x)$, так что дифференциал функции определен однозначно и выражается формулой

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

Заметим, что переменную x тоже можно рассматривать как функцию от самой себя. В этом смысле ее дифференциалом dx, в какой бы

точке мы его ни вычисляли, служит линейная функция от Δx, определяемая формулой

$$dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Таким образом, для всякой дифференцируемой функции $y = f(x)$ ее дифференциал dy в точке x при каждом значении его переменной Δx совпадает с линейной функцией $f'(x)\,dx$. Это наблюдение можно выразить «функциональным» равенством

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Наконец, если мы полностью откажемся от символа f, полагая $y' = f'(x)$, предыдущее соотношение предстанет нам в своей совершенной классической форме:

$$dy = y'\,dx.$$

В свою очередь это равенство позволяет записать производную в виде отношения дифференциала функции и дифференциала ее переменной:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Иногда правую часть этой формулы считают одним из обозначений производной. В нашем же случае последнее равенство выражает не соглашение, а теорему.

2.166. Посчитайте дифференциал функции y, выразив его через переменную x и ее дифференциал dx, если

(а) $y = 1/x$; (б) $y = 1/x^3$; (в) $y = \sqrt{x}$;

(г) $y = x\,e^x$; (д) $y = \ln(1 - x^2)$; (е) $y = \arccos\sqrt{x}$.

2.167. Рассмотрим две дифференцируемые функции u и v, имеющие общую область определения. Докажите следующие правила дифференцирования:

(а) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

(б) $d(uv) = v\,du + u\,dv$;

(в) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

Разумеется, в последней формуле предполагается, что $v \neq 0$.

2.168. Пусть снова u и v означают дифференцируемые функции. Выразите дифференциал dy функции y через функции u и v и их дифференциалы du и dv, если:

$$\text{(а) } y = u^2v^3; \qquad \text{(в) } y = \operatorname{arctg}(u/v);$$

$$\text{(б) } y = u/\sqrt{v}; \qquad \text{(г) } y = \ln\sqrt{u^2+v^2}.$$

2.169. Пусть y дифференцируемо зависит от переменной x, представляющей собой дифференцируемую функцию переменной t, так что y тоже можно рассматривать как функцию от t. Выразите дифференциалы этих двух функций через dt и найдите связь между получившимися линейными формами.

Соотношение, которое вы обнаружите, отражает, как говорят, свойство инвариантности формы первого дифференциала: считаем ли мы переменную x независимой или же она играет роль промежуточного аргумента, связь между дифференциалами dy и dx выражается всегда одним и тем же равенством.

2.170. Посчитайте непосредственно следующие отношения дифференциалов:

$$\text{(а) } \frac{d\left(x^3-2x^6-x^9\right)}{d\left(x^3\right)}; \qquad \text{(б) } \frac{d\left(\operatorname{tg} x\right)}{d\left(\operatorname{ctg} x\right)}; \qquad \text{(в) } \frac{d\left(\arcsin x\right)}{d\left(\arccos x\right)}.$$

А теперь вычислите эти же дроби с применением инвариантности формы первого дифференциала.

Заменяя приращение функции ее дифференциалом, мы совершаем ошибку, бесконечно малую по сравнению с приращением аргумента. Можно ли этой ошибкой пренебречь, определяется конкретными условиями той или иной задачи, а также опытом и здравым смыслом. Решите на эту тему следующие симпатичные и полезные упражнения из Демидовича.

2.171. Период T малых колебаний маятника длины l в согласованных единицах измерения определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

где g означает ускорение, создаваемое силой притяжения Земли. Считая, что $g = 981$ *см/сек*^{2}, выясните, насколько нужно изменить длину маятника $l = 20$ *см*, чтобы период колебаний T увеличился на 0,05 *сек.*

2.172. Посчитайте приближенно следующие значения:

$$\text{(а) } \sqrt{4,01}; \qquad \text{(в) } \sin 29^\circ; \qquad \text{(д) } \operatorname{arctg} 1,05;$$

(б) $\sqrt[3]{1,02}$; (г) $\cos 151^\circ$; (е) $\lg 11$.

2.173. Выясните, с какими абсолютной и относительной погрешностями можно определить площадь квадрата, если измерения показали, что его сторона равна $(2,4 \pm 0,05)$ *м*.

2.174. Выясните, с какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара, чтобы его объем можно было посчитать с точностью до 1%.

2.175. Формулу, указанную в задаче 2.171, можно использовать для экспериментального определения ускорения свободного падения g. В самом деле, если мы возьмем маятник заданной длины l и измерим период T его колебаний при небольшой их амплитуде, то получим

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Выясните, как отразится на значении g относительная погрешность δ, допущенная при измерении: (а) длины l; (б) периода T.

2.176. Определите обсолютную погрешность десятичного логарифма числа, если относительная погрешность этого числа равна δ.

Чтобы точнее посчитать приращение функции, приходится отказаться от линейных формул, заменяя их немного более сложными квадратичными. Пусть у функции $y = f(x)$ в точке x существует вторая производная. Тогда, согласно формуле Тейлора,

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2} d^2 y + o\left((\Delta x)^2\right),$$

где $d^2 y$ означает уже квадратичную функцию переменной Δx, определяемую формулой

$$d^2 y = f''(x)\,(\Delta x)^2.$$

Эту квадратичную форму называют вторым дифференциалом функции f в точке x. Таким образом, второй дифференциал отвечает за квадратичную часть приращения изучаемой функции.

Замечая, что квадрат $dx^2 = dx \cdot dx$ линейной функции dx принимает на каждом приращении Δx значение $(\Delta x)^2$, а также полагая $y'' = f''(x)$, мы можем записать выражение для второго дифференциала в наиболее простом виде:

$$d^2 y = y'' dx^2.$$

2.177. Найдите второй дифференциал функции, равной своей независимой переменной.

Следует отметить, что если первый дифференциал уже посчитан, дальнейшее дифференцирование можно проводить по формуле

$$d^2y = d\,(y'\,dx) = dy'\,dx,$$

промежуточное звено которой, не вполне корректное, часто выражают словами: «второй дифференциал есть первый дифференциал от первого дифференциала». Между тем, такой подход к делу полезен при вычислениях.

2.178. Найдите вторые дифференциалы следующих функций:

$$\text{(а) } y = e^x; \quad \text{(б) } y = \sqrt{1+x^2}; \quad \text{(в) } y = \frac{\ln x}{x}.$$

Выполните то же самое задание, но в предположении, что сама переменная x есть дважды дифференцируемая функция другой переменной.

2.179. Считая функции u и v дважды дифференцируемыми, вычислите второй дифференциал функции y, если:

$$\text{(а) } y = uv; \quad \text{(б) } y = u/v; \quad \text{(в) } y = \ln\,(u^2+v^2); \quad \text{(г) } y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}.$$

Точно так же определяются и дифференциалы d^ky любого порядка k в предположении, что существуют соответствующие производные:

$$d^ky = f^{(k)}(x)\,(\Delta x)^k.$$

Как и в предыдущих случаях, дифференциал функции порядка k может быть выражен через k-ю степень дифференциала переменной:

$$d^ky = y^{(k)}\,dx^k.$$

Смысл этой степенной функции переменной Δx в том, что она определяет степенную часть приращения исходной функции порядка k.

2.180. Убедитесь, что в новых обозначениях формула Тейлора может быть записана в следующей замечательной форме:

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2!}d^2y + \ldots + \frac{1}{n!}d^ny + o\,((\Delta x)^n).$$

2.181. Перенесите формулу Лейбница на дифференциалы.

2.182. Посчитайте все дифференциалы следующих функций:

$$\text{(а) } y = x\,e^{2x}; \quad \text{(б) } y = x\,\cos 2x; \quad \text{(в) } y = x\,\sin 2x.$$

Запишите формулы для этих дифференциалов в точке $x = 0$. Найдите их значения при условии, что $dx = 1$.

Вектор-функции скалярного аргумента

Вектор-функцией скалярного аргумента мы будем называть любое отображение, у которого областью определения служит числовой промежуток, а значениями являются векторы трехмерного евклидова пространства. Если все эти «векторные» значения принадлежат одной плоскости, вектор-функцию называют плоской. Выберем три взаимно ортогональных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ единичной длины. Тогда каждая вектор-функция $\vec{a}\,(t)$ может быть записана в виде линейной комбинации этих трех векторов:

$$\vec{a}\,(t) = a_1\,(t)\,\vec{e}_1 + a_2\,(t)\,\vec{e}_2 + a_3\,(t)\,\vec{e}_3,$$

где коэффициенты $a_i(t)$, представляющие собой уже обычные числовые функции, однозначно определяются равенствами

$$a_i(t) = \vec{a}\,(t) \cdot \vec{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Если отложить все векторы $\vec{a}\,(t)$ от некоторой общей точки, их концы опишут в пространстве определенную линию. Ее называю годографом вектор-функции $\vec{a}\,(t)$.

2.183. Нарисуйте годограф вектор-функции $\vec{a}\,(t)$, если:

(а) $\vec{a}\,(t) = t\,\vec{e}_1 + t^2\,\vec{e}_2$;
(б) $\vec{a}\,(t) = \cos t\,\vec{e}_1 + \sin t\,\vec{e}_2$;
(в) $\vec{a}\,(t) = \operatorname{ch} t\,\vec{e}_1 + \operatorname{sh} t\,\vec{e}_2$;
(г) $\vec{a}\,(t) = \cos t\,\vec{e}_1 + \sin t\,\vec{e}_2 + t\,\vec{e}_3$.

Вектор $\vec{a}_0$ называют пределом вектор-функции $\vec{a}\,(t)$ в точке $t = t_0$, если при $t \to t_0$ длина вектора $\vec{a}\,(t) - \vec{a}_0$ стремится к нулю. В этом случае пишут

$$\vec{a}_0 = \lim_{t \to t_0} \vec{a}\,(t).$$

2.184. Докажите, что вектор $\vec{a}_0$ является пределом вектор-функции $\vec{a}\,(t)$ при $t \to t_0$ тогда и только тогда, когда координаты вектора $\vec{a}\,(t)$ при $t \to t_0$ стремятся к соответствующим координатам вектора $\vec{a}_0$.

2.185. Пусть $\vec{a}\,(t) \to \vec{a}_0$ при $t \to t_0$. Докажите, что в таком случае и $|\vec{a}\,(t)| \to |\vec{a}_0|$ при $t \to t_0$. Верно ли обратное? А если вектор $\vec{a}_0$ равен нулю? Что в случае $\vec{a}_0 \neq 0$ нужно добавить к условию сходимости длин, чтобы можно было гарантировать сходимость самих векторов?

2.186. Пусть при $t \to t_0$ вектор-функции $\vec{a}\,(t)$ и $\vec{b}\,(t)$ стремятся соответственно к векторам $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$, а числовые функции $\lambda\,(t)$ и $\mu\,(t)$ имеют конечные пределы λ_0 и μ_0. Докажите, что тогда

$$\lim_{t_0} (\lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}) = \lambda_0\,\vec{a}_0 + \mu_0\,\vec{b}_0.$$

$$\lim_{t_0} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0; \quad \lim_{t_0} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}_0 \times \vec{b}_0.$$

Вектор-функцию $\vec{a}\,(t)$ считают непрерывной в точке $t = t_0$, если она определена при указанном значении параметра и

$$\vec{a}\,(t_0) = \lim_{t \to t_0} \vec{a}\,(t).$$

2.187. Сформулируйте аналоги утверждений последних трех задач, относящиеся к понятию непрерывности вектор-функции скалярного аргумента, и докажите их.

Говорят, что вектор-функция $\vec{a}\,(t)$ дифференцируема в точке t, если существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}\,(t + \Delta t) - \vec{a}\,(t)}{\Delta t},$$

который, как и в скалярном случае, называют производной и обозначают символом $\vec{a}\,'(t)$. Обычно параметр t интерпретируют как время, и тогда, вслед за Ньютоном, производную обозначают символом $\dot{\vec{a}}\,(t)$.

2.188. Докажите, что дифференцируемая вектор-функция обязательно непрерывна. Приведите пример непрерывной вектор-функции, не имеющей производной в заданной точке.

2.189. Докажите, что вектор-функция дифференцируема тогда и только тогда, когда дифференцируемы ее координаты. При этом координаты ее производной равны производным координат.

2.190. Найдите производные вектор-функций $\vec{a}\,(t)$, указанных в задаче 2.183, в точке $t = 0$.

Дифференциалом вектор-функции $\vec{a} = \vec{a}\,(t)$ в точке t называют линейную форму

$$d\vec{a} = \vec{a}\,'(t)\,dt = \dot{\vec{a}}\,(t)\,dt,$$

зависящую от приращения Δt аргумента t и принимающую векторные значения. В свою очередь, производная теперь может быть выражена через дифференциал по формуле

$$\vec{a}\,'(t) = \dot{\vec{a}}\,(t) = \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

2.191. Вектор-функции, как и векторы, можно складывать и вычитать, их можно умножать и делить на скалярные функции, а кроме того, в них можно заменять переменную новым скалярным параметром. Сформулируйте и докажите правила дифференцирования вектор-функций, соответствующие указанным операциям. Эти правила точно такие же, как их скалярные версии.

2.192. В дополнение к предыдущей задаче, докажите, что скалярное и векторное произведения дифференцируемых вектор-функций $\vec{a}$ и $\vec{b}$ также дифференцируемы, причем

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})' = \vec{a}\,'\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b}\,', \qquad (\vec{a}\times\vec{b})' = \vec{a}\,'\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b}\,'.$$

Приведите два доказательства этих утверждений: «инвариантное», опирающееся на свойства операций скалярного и векторного умножений, и «координатное», использующее координатные выражения обсуждаемых операций. Получите отсюда правило дифференцирования смешанного произведения трех переменных векторов.

2.193. Как вы думаете, распространяется ли на вектор-функции теорема Лагранжа, или формула конечных приращений? В качестве примера рассмотрите винтовую линию, определенную в задаче 2.183.

2.194. Пусть вектор-функция $\vec{a}\,(t)$ непрерывна на отрезке $t_1 \le t \le t_2$ и в каждой его внутренней точке имеет производную, удовлетворяющую неравенству $|\vec{a}\,'(t)| \le M$, где постоянная M не зависит от t. Докажите, что в таком случае

$$|\vec{a}\,(t_2) - \vec{a}\,(t_1)| \le M\,(t_2 - t_1).$$

С этой целью полезно предварительно изучить приращение скалярной функции $\vec{a}\,(t)\cdot\vec{c}$, взяв в качестве $\vec{c}$ произвольный вектор, а затем положить $\vec{c} = \vec{a}\,(t_2) - \vec{a}\,(t_1)$.

2.195. Опираясь на только что доказанную вами теорему, опишите все дифференцируемые вектор-функции $\vec{a}\,(t)$, у которых производная $\vec{a}\,'(t)$ в каждый момент:

(а) равна нулю;

(б) постоянна;

(в) коллинеарна вектору $\vec{a}\,(t)$;

(г) ортогональна вектору $\vec{a}\,(t)$.

Вторые и все следующие производные и дифференциалы вектор-функции определяются и обозначаются точно так же, как и в скалярном случае. Например, вторая производная $\vec{a}\,''(t) = \ddot{\vec{a}}\,(t)$ вектор-функции $\vec{a}\,(t)$ есть результат дифференцирования первой производной $\vec{a}\,'(t) = \dot{\vec{a}}\,(t)$, а дифференциалом второго порядка нашей функции служит квадратичная форма

$$d^2\vec{a} = \vec{a}\,''(t)\,dt^2 = \ddot{\vec{a}}\,(t)\,dt^2,$$

представляющая собой функцию от приращения аргумента, принимающую векторные значения. Отсюда

$$\vec{a}\,''(t) = \ddot{\vec{a}}\,(t) = \frac{d^2\vec{a}}{dt^2}.$$

2.196. Опишите все дважды дифференцируемые вектор-функции, у которых вторая производная в каждый момент: (а) равна нулю; (б) постоянна. Как в механике называют движения, описываемые такими вектор-функциями?

2.197. Представим себе, что в каждой точке некоторой пространственной области указан вектор $\vec{F}$. В таком случае говорят, что в области задано векторное поле. Будем понимать вектор $\vec{F}$ как силу, которая действует на материальную точку, когда она находится в том месте, где закреплен этот вектор. Если наша точка имеет массу m, то ее радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$, согласно Ньютону, меняется с течением времени t в соответствии с уравнением $m\,\ddot{\vec{r}} = F$. Докажите, что при этом в каждый момент

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\,\dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

2.198. Силовое поле назовем центральным относительно точки O, если в каждой точке рассматриваемой области оно направлено вдоль линии, проходящей через «центр» O и данную точку. Какие поля, известные вам из школьного курса физики, относятся к описанному классу? Докажите, что траектория материальной точки, движущейся в центральном поле, целиком располагается в пределах некоторой плоскости, проходящей через центр силы.

2.199. Если $\vec{r}$ означает радиус-вектор движущейся точки, то половину от $|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|$ называют секториальной скоростью движения. Выясните геометрический смысл этой величины. Докажите, что движение в центральном поле происходит с постоянной секториальной скоростью.

2.200. Куб вращается вокруг одной из своих вершин O, которая остается неподвижной. Рассмотрим три вектора, идущие по ребрам куба из точки O в соседние вершины. Докажите, что скорости этих векторов в каждый момент компланарны.