Электричество и магнетизм

Часть 2. Электрическое поле в веществе.

Погосов Артур Григорьевич

Уважаемые студенты!

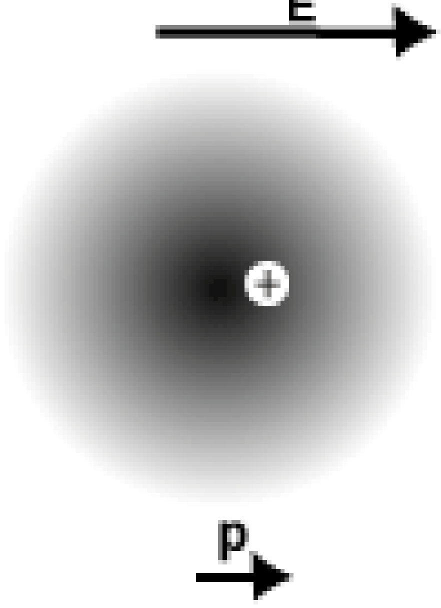
Предлагаю вашему вниманию иллюстративный материал к лекциям по электричеству и магнетизму.

<u>Обратите внимание:</u> эти лекции читаются классическим способом ("мелом по доске"), сопровождаются комментариями, выводами формул и пояснениями, как это обычно принято. Представленный же материал лишён этого всего, содержит лишь иллюстрации и основные формулы, что можно рассматривать как "фоновое" сопровождение лекций, но никак не замену самих лекций и ваших конспектов.

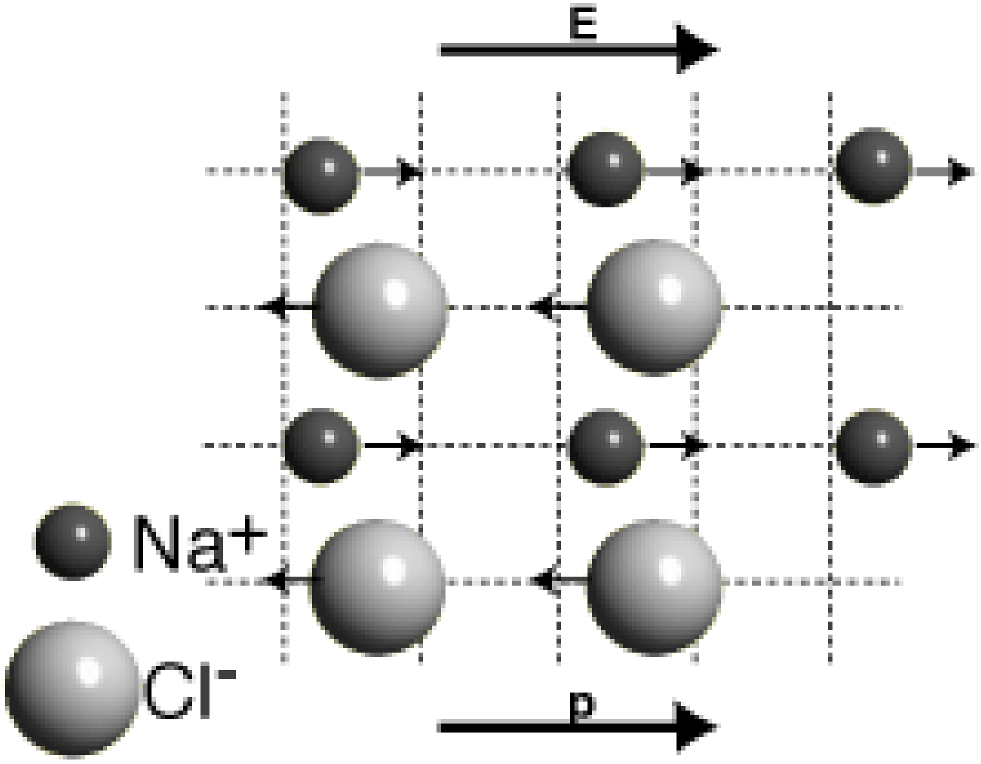
В то же время, я рассчитываю, что этот материал поможет хотя бы некоторым из вас лучше усвоить содержание лекций, вспомнить логику и последовательность изложения. Кроме того, такой сверхкраткий экстракт иногда позволяет по-другому взглянуть на курс: охватить его в целом, увидеть взаимосвязь частей.

А.Г.Погосов.

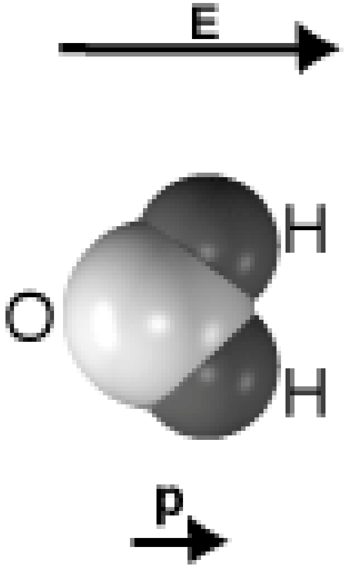
Диэлектрики



неполярные

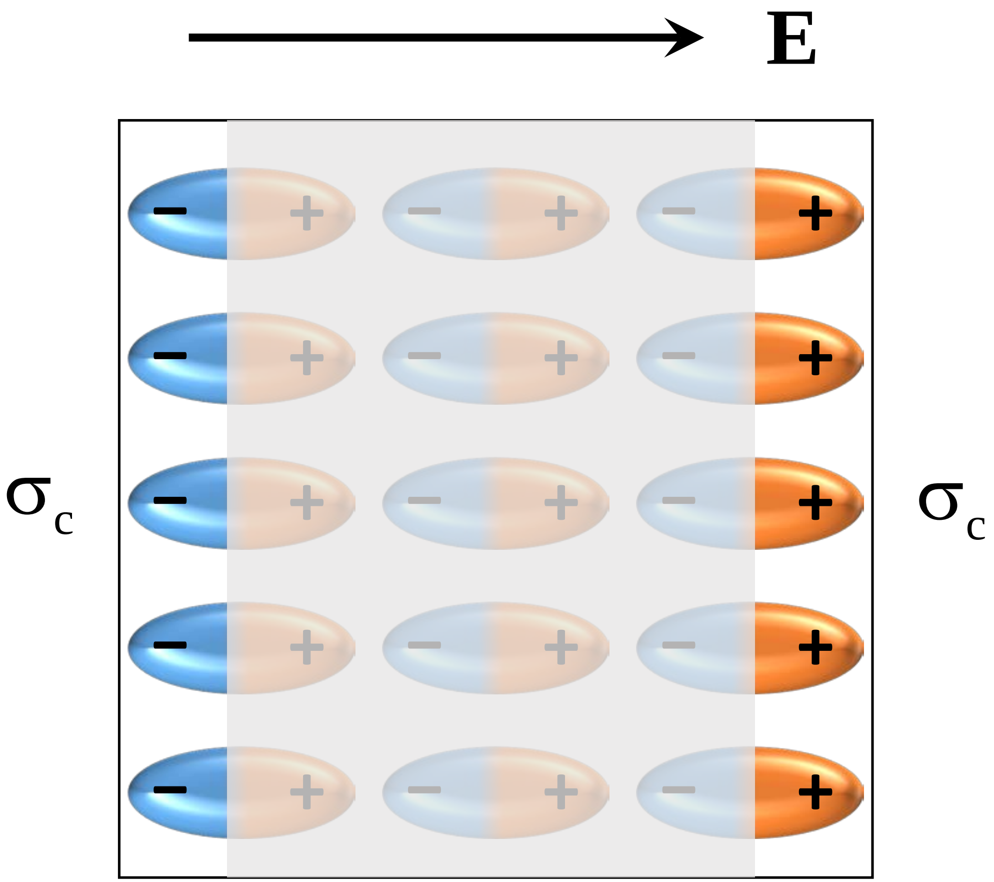


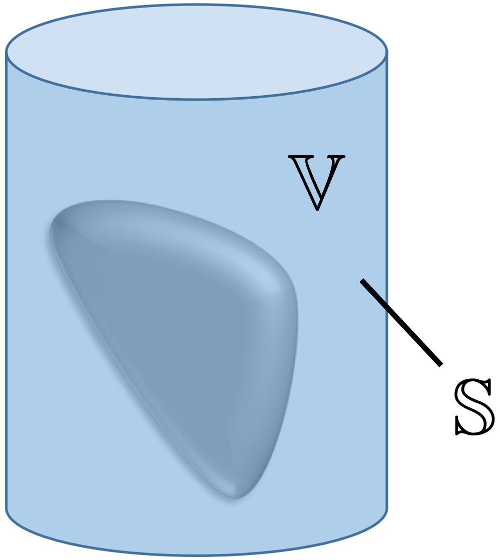
ионные



полярные

Связанный заряд





$$\sigma_c = P_n$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{V}} \langle \rho_c \rangle dV = 0$$

$$\langle \rho_c \rangle = -\operatorname{div} \mathbf{P}$$

вне тела $\mathbf{P} = 0$

Вектор поляризации P

Определение:

$$\langle \rho_c \rangle = -\operatorname{div}\mathbf{P}$$

вне тела $\mathbf{P} = 0$

Свойство:

Вектор поляризации P равен дипольному моменту единицы объёма поляризованного диэлектрика

$$\mathbf{P} = \chi\,\mathbf{E}$$

поляризуемость

Уравнения электрического поля в диэлектрике

Усреднение:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\langle \mathbf{E} \rangle = 4\pi\left(\langle \rho_c \rangle + \rho\right) \\ \operatorname{rot}\langle \mathbf{E} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\langle \rho_c \rangle = -\operatorname{div}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = \chi\langle \mathbf{E} \rangle$$

Обозначения:

$$\langle \mathbf{E} \rangle =: \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} =: \mathbf{D}$$

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \end{cases}}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

Вектор индукции:

$$\boxed{\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \left(1 + 4\pi\chi\right)\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}}$$

Диэлектрическая проницаемость

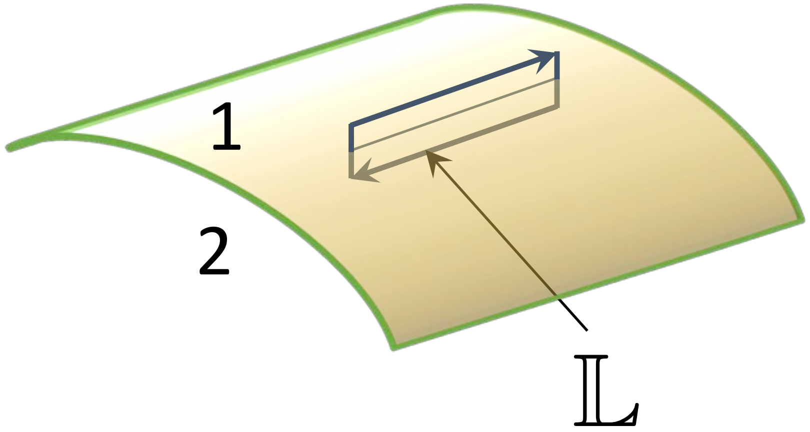
Граничные условия для электрического поля в диэлектрике

Уже было, только теперь $\langle \mathbf{E} \rangle =: \mathbf{E}$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

$$\oint\limits_{\mathbb{L}} \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0$$

$$\boxed{E_{1\tau}\big| = E_{2\tau}\big|}$$



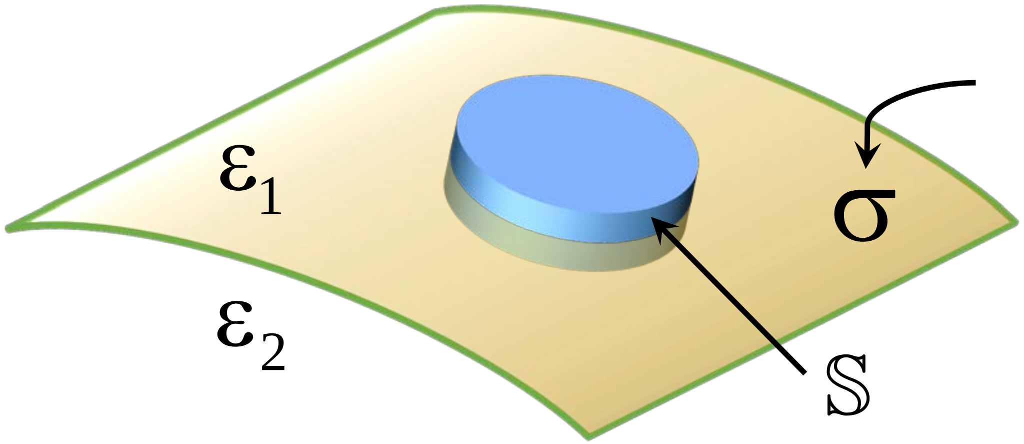
Непрерывность тангенциальной компоненты вектора напряжённости электрического поля

Это эквивалентно непрерывности потенциала: $\boxed{\varphi_1\big| = \varphi_2\big|}$

Граничные условия для электрического поля в диэлектрике

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\oiint\limits_{\mathbb{S}} \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = 4\pi Q$$



поверхностная плотность *свободного* заряда

Нормальная компонента вектора индукции электрического поля терпит разрыв

$$\boxed{D_{1n}\Big| - D_{2n}\Big| = 4\pi\sigma}$$

или $$\varepsilon_1 E_{1n}\Big| - \varepsilon_2 E_{2n}\Big| = 4\pi\sigma$$

Основное уравнение электростатики в диэлектриках

$$\nabla\left(\varepsilon\nabla\varphi\right) = -4\pi\rho$$

В однородном диэлектрике:

$$\Delta\varphi = -4\pi\frac{\rho}{\varepsilon}$$

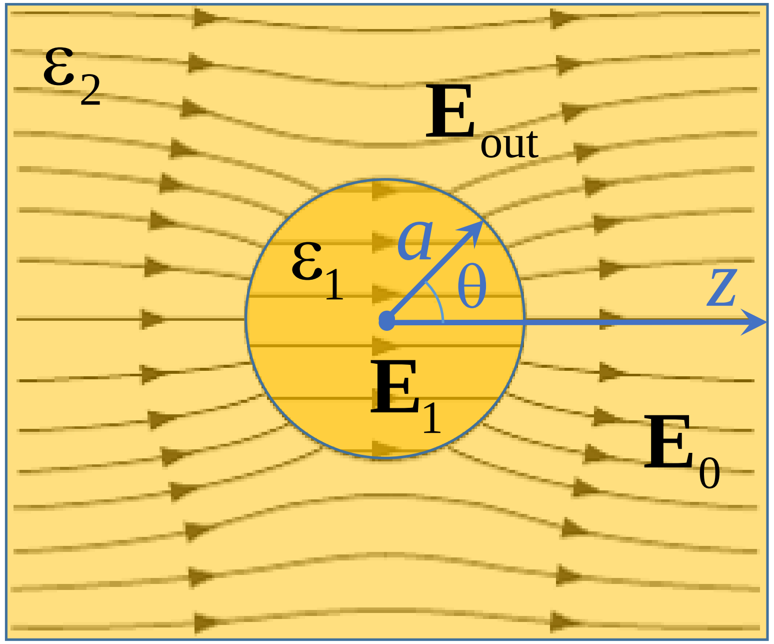
Граничные условия:

$$\varphi_1\Big| = \varphi_2\Big|$$

$$\varepsilon_1\left(\nabla\varphi_1\right)_n\Big| = \varepsilon_2\left(\nabla\varphi_2\right)_n\Big|$$

Диэлектрический шар в однородном поле

- Потенциал диполя и однородного поля имеют одинаковую угловую зависимость
- $\varepsilon_1 \to \infty$ соотв. металлическому шару (уже решали)



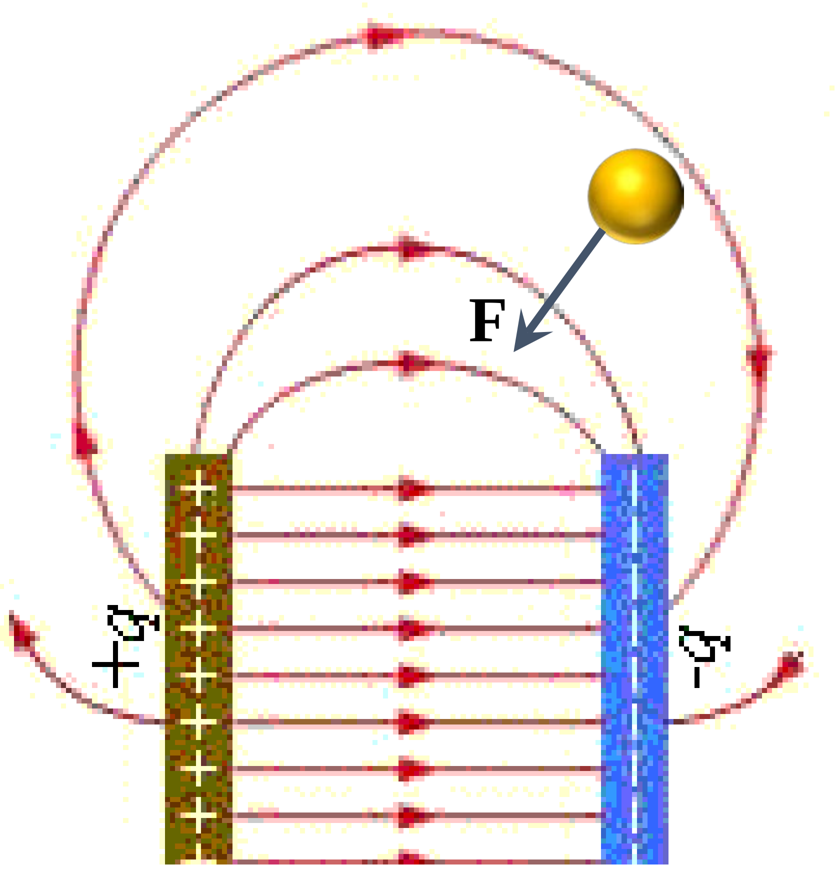
$$\mathbf{E}_{\text{out}} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{d}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{dr})\mathbf{r}}{r^5} \qquad \mathbf{E}_{\text{in}} = \mathbf{E}_1 \qquad \mathbf{d} \| \mathbf{E}_1 \| \mathbf{E}$$

$$E_\tau\Big| - \text{непр}: \qquad E_1 \sin\theta = \left(E_0 - \frac{d}{a^3}\right)\sin\theta$$

$$D_n\Big| - \text{непр}: \qquad \varepsilon_1 E_1 \cos\theta = \varepsilon_2 \left(E_0 + \frac{2d}{a^3}\right)\cos\theta$$

$$\mathbf{d} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\mathbf{E}_0 a^3 \qquad \mathbf{E}_1 = \frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\mathbf{E}_0$$

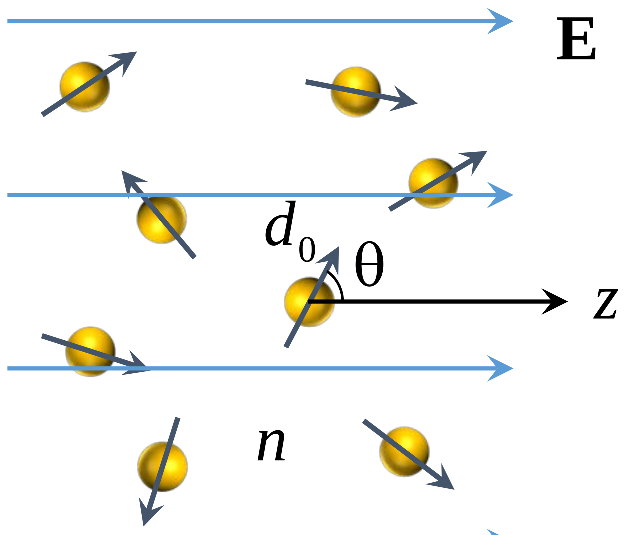
Втягивание диэлектрика в сильное поле



$$\mathbf{d} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\mathbf{E}_0\, a^3$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{d}\,\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3\, \nabla E_0^2$$

Оценки диэлектрической проницаемости



полярный диэлектрик
(газ)

$$\frac{Ed_0}{kT} \ll 1$$

$$U = -Ed_0 \cos\theta$$

$$w \propto e^{-\frac{U}{kT}}$$

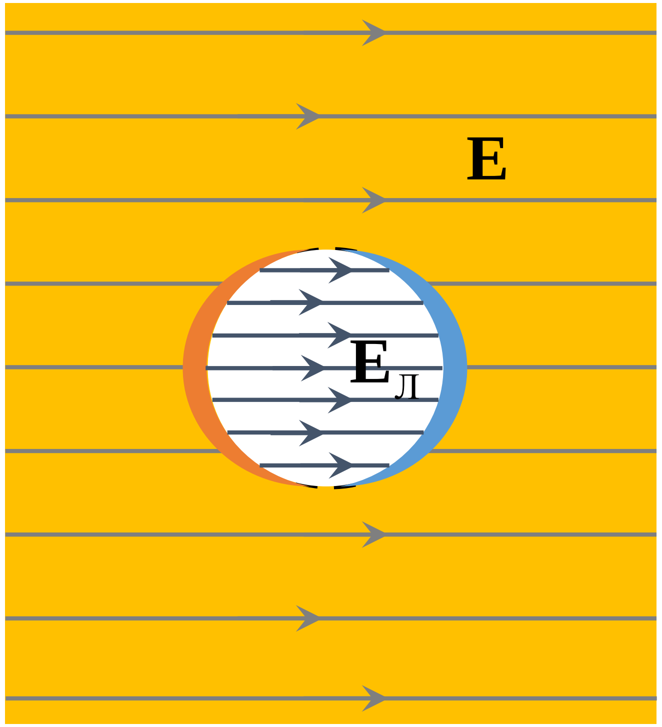
$$\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

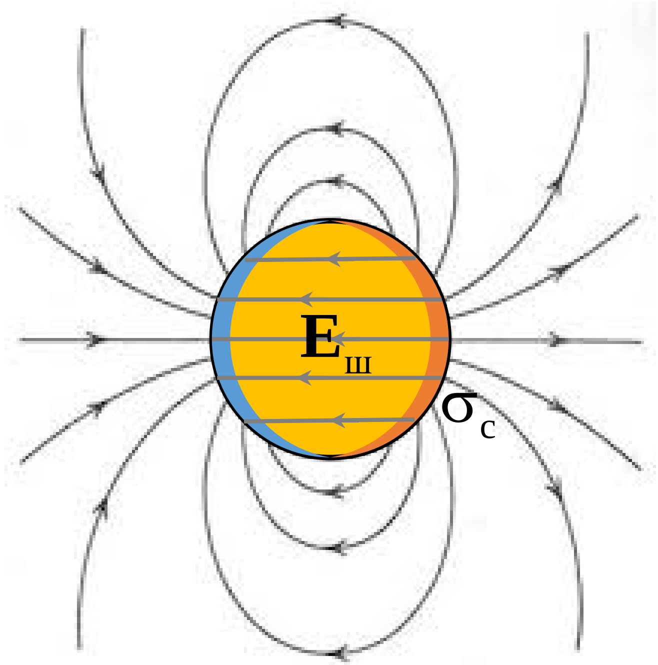
$$P = n\langle d_z \rangle$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{4}{3}\pi\frac{n d_0^2}{kT}$$

$$\frac{4}{3}\pi\frac{n d_0^2}{kT} \sim 10^{-2}$$

Локальное поле в диэлектрике (поле Лоренца)





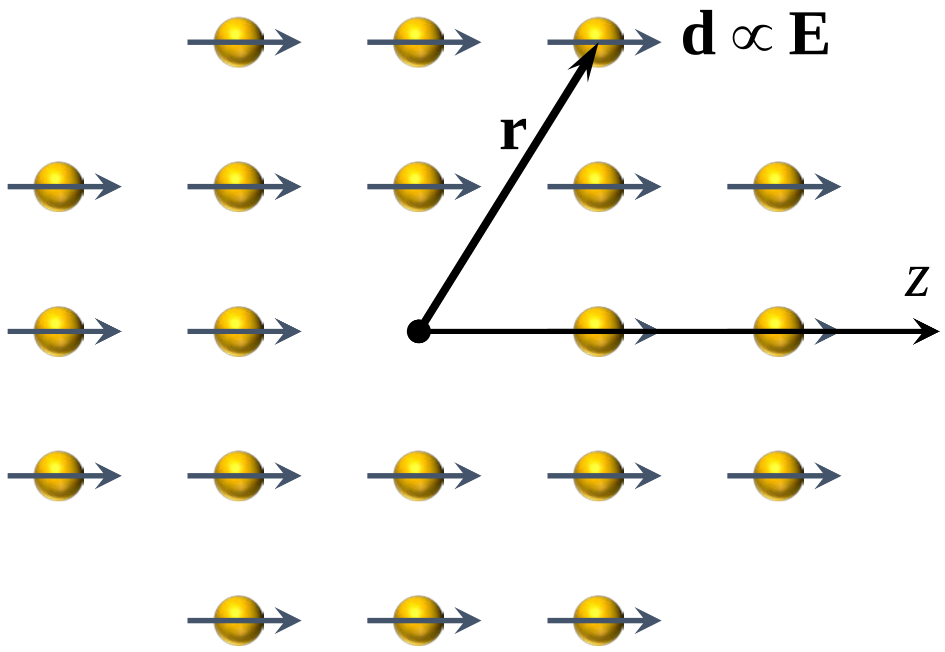
Хе́ндрик А́нтон Ло́ренц (1853 – 1928)

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

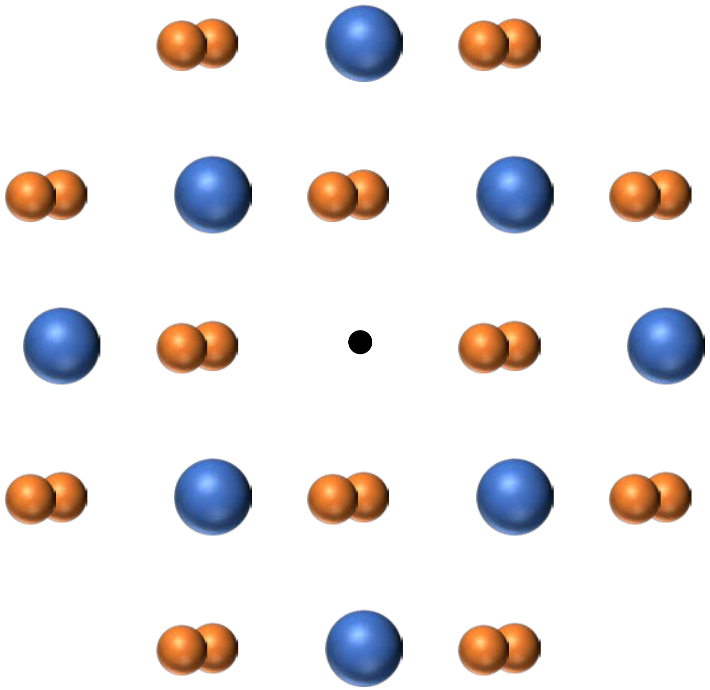
$$\mathbf{E}_{Л} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{ш}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{Л} = \mathbf{E} + \frac{4}{3}\pi\mathbf{P}}$$

Поле Лоренца (обоснование)



неполярный диэлектрик



ионный диэлектрик

$$\sum_{x^2+y^2+z^2=r^2} \mathbf{E}_d \propto \left\langle \mathbf{E}_d \right\rangle_{x^2+y^2+z^2=r^2} = 0$$

Формула Клаузиуса — Моссотти

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}_{\text{Л}}$$

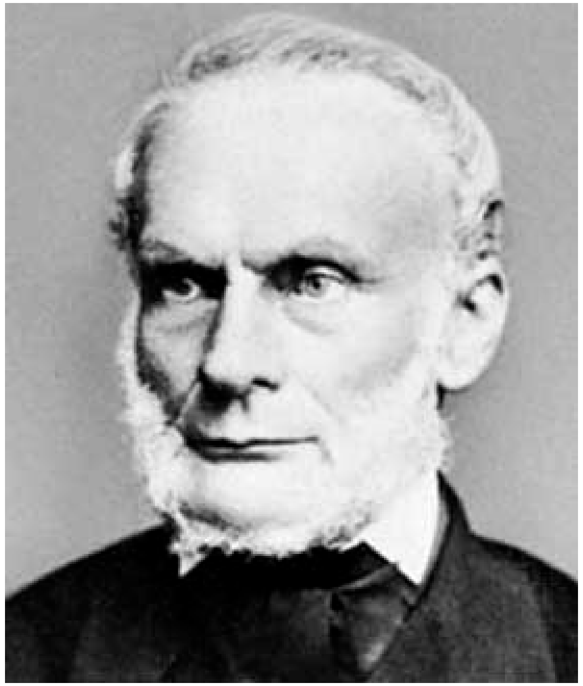
(неполярный диэлектрик)

$$\mathbf{P} = n\mathbf{d}$$

$$\mathbf{E}_{\text{Л}} = \mathbf{E} + \frac{4}{3}\pi \mathbf{P}$$

$$\varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$$

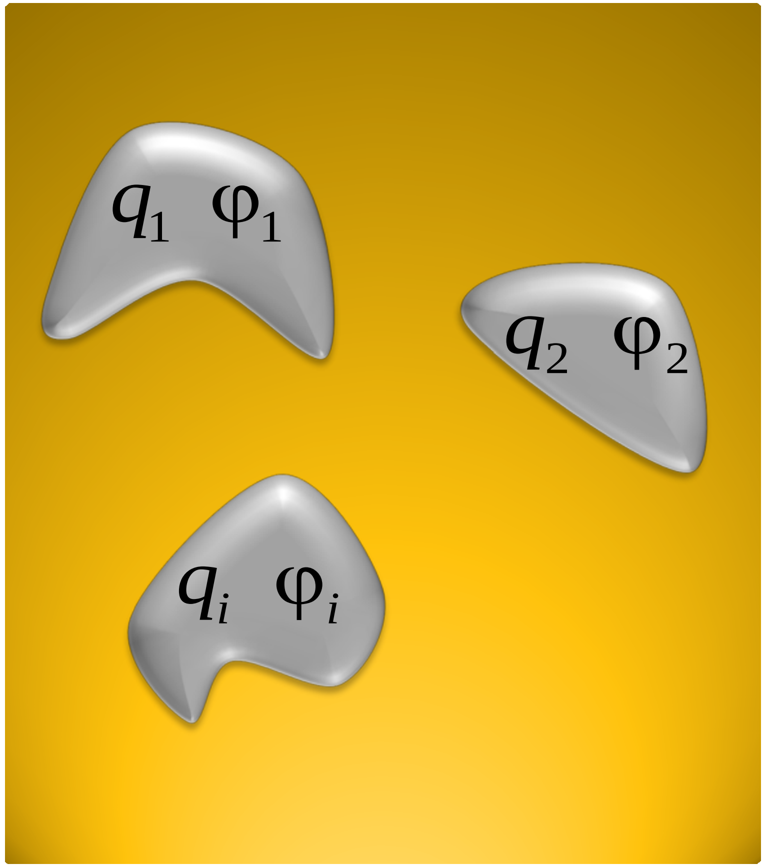
$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4}{3}\pi n \alpha$$



Рудольф Клаузиус
(1822 – 1888)

Оттавиано Фабрицио Моссотти
(1791 – 1863)

Энергия поля в диэлектрике

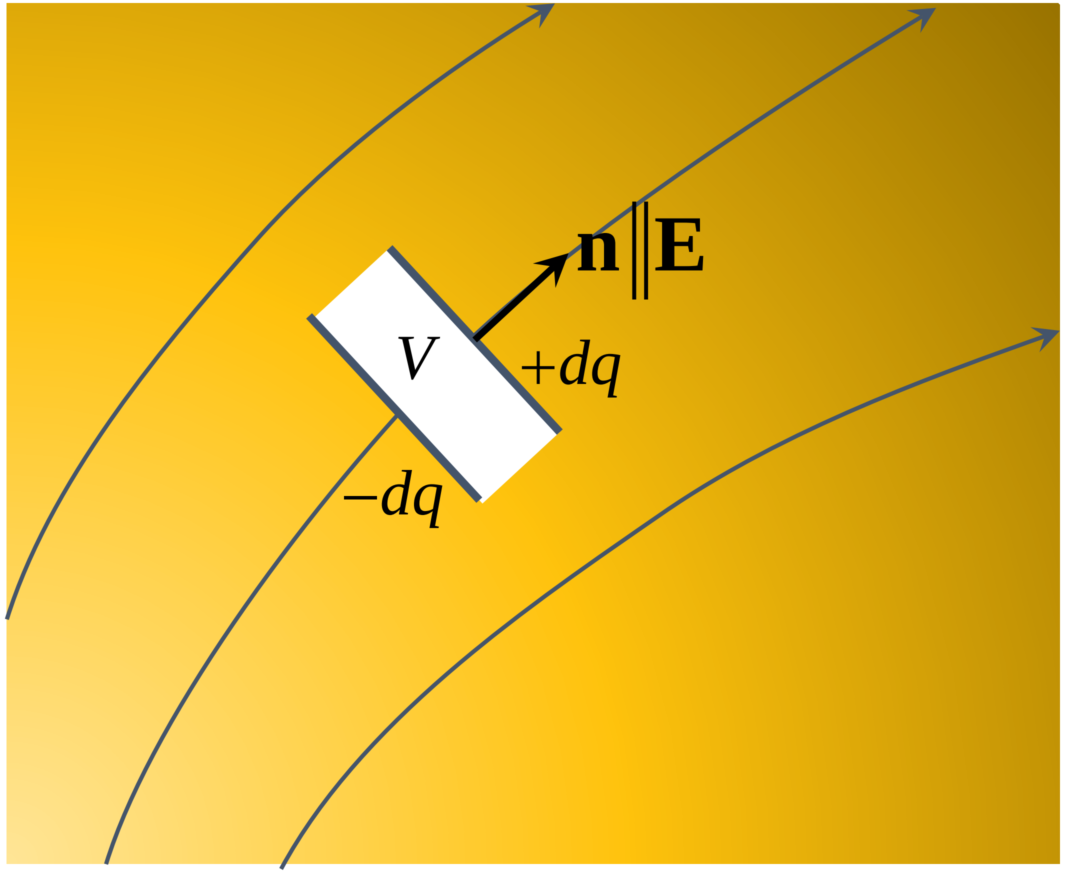


Аналогично случаю проводников в вакууме

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\,\varphi_i \qquad W = \iiint_{\mathbb{V}} \frac{ED}{8\pi}\,dV$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{\mathbb{V}} \varphi\,\rho\,dV$$

Энергия поля в диэлектрике



$$dW = \frac{\mathbf{E}\,d\mathbf{D}}{4\pi}V \qquad dw = \frac{\mathbf{E}\,d\mathbf{D}}{4\pi}$$

Если $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$

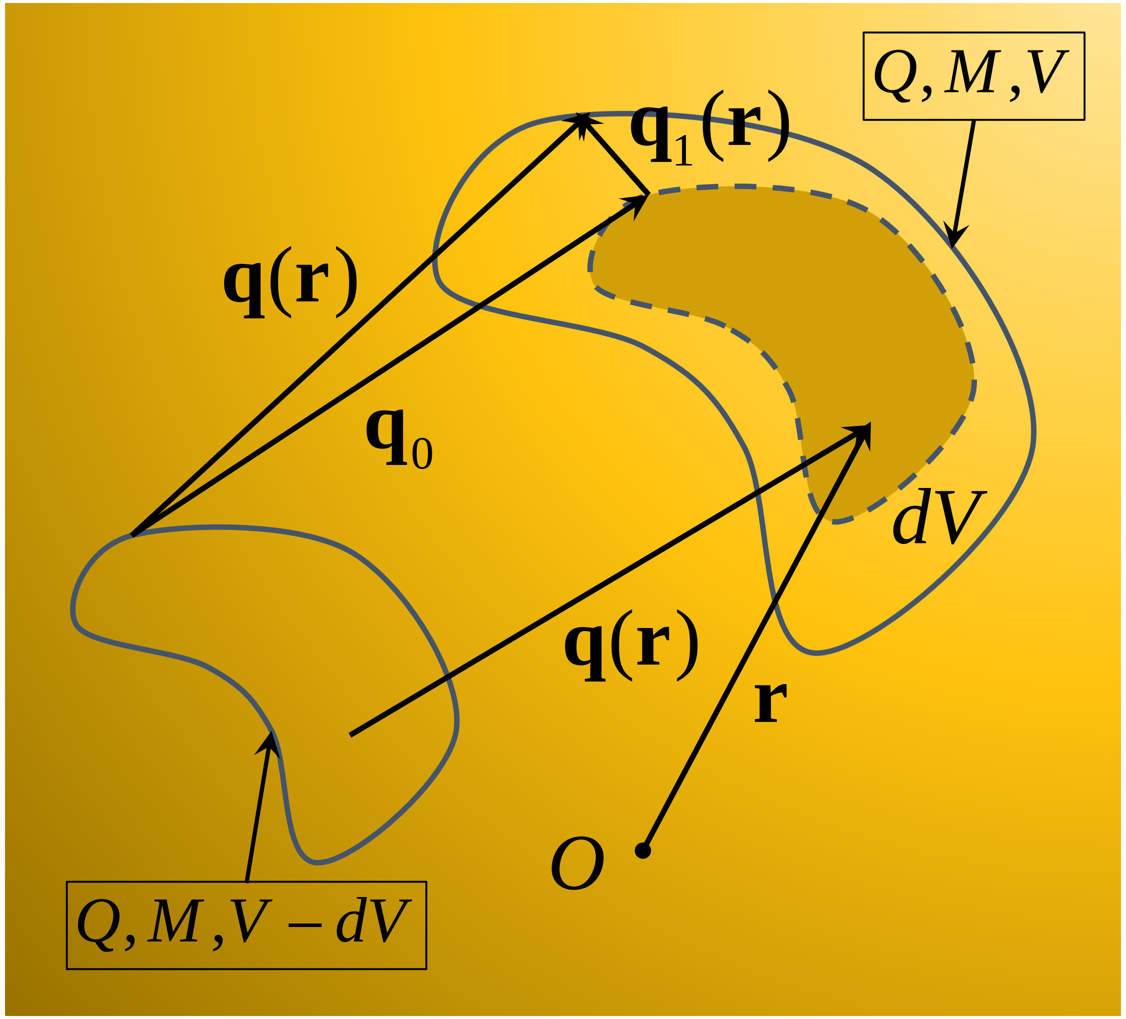
$$w = \frac{ED}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}$$

$$W = \iiint w\,dV$$

Пондеромоторные силы

$$\delta W = -\iiint \mathbf{f}\,\mathbf{q}\,dV$$

метод *виртуальных перемещений*



$$\delta W = \iiint \varphi\,\delta\rho\,dV - \frac{1}{8\pi}\iiint E^2\,\delta\varepsilon\,dV$$

$$dV = V\,\mathrm{div}\,\mathbf{q} \qquad d\tau = -\tau\,\mathrm{div}\,\mathbf{q}$$

$$\delta\rho = -\nabla(\rho\mathbf{q}) \qquad \delta\varepsilon = -\mathbf{q}\nabla\varepsilon - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\nabla\mathbf{q}$$

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} - \frac{E^2}{8\pi}\nabla\varepsilon + \nabla\left(\frac{E^2}{8\pi}\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)$$

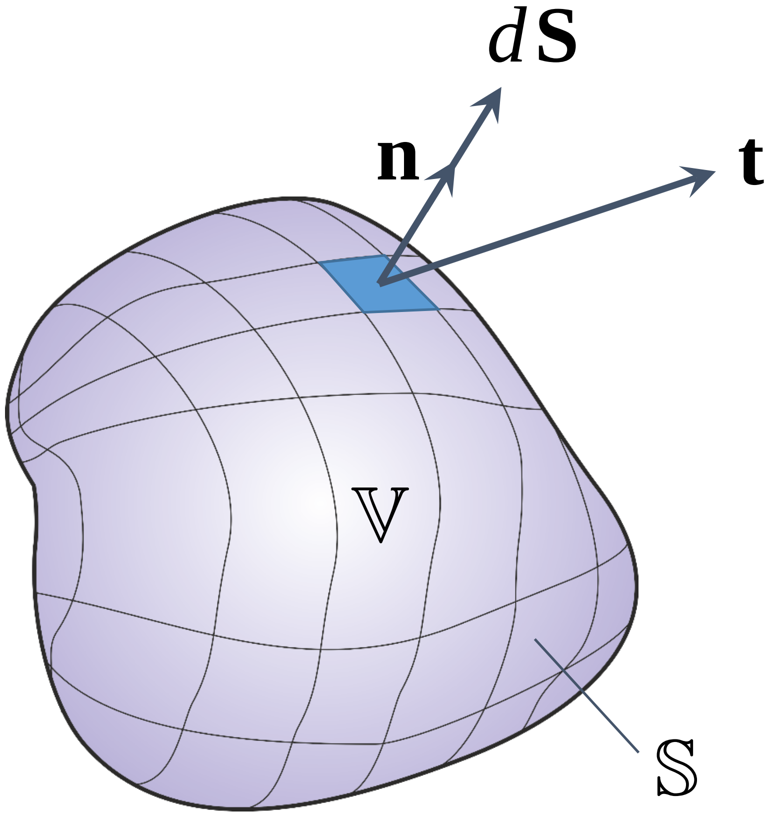
электрострикция

Тензор напряжений

$$\iiint\limits_{\mathbb{V}} \mathbf{f}\, dV = \oiint\limits_{\mathbb{S}} \mathbf{t}\, dS \qquad t_i = T_{ik}\, n_k$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{V}} f_i\, dV = \oiint\limits_{\mathbb{S}} T_{ik}\, dS_k \qquad f_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$$

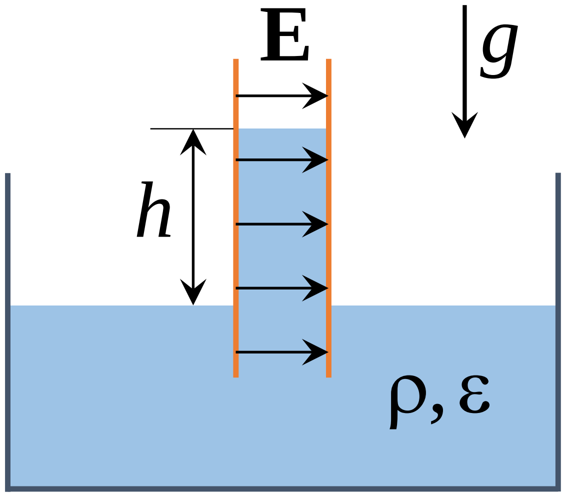
$$\iiint\limits_{\mathbb{V}} [\mathbf{r} \times \mathbf{f}]\, dV = \oiint\limits_{\mathbb{S}} [\mathbf{r} \times \mathbf{t}]\, dS \quad \Rightarrow \quad T_{ik} = T_{ki}$$



Условие равновесия границы двух сред: $T_{ik}\, n_k \big| = -T'_{ik}\, n'_k \big| = T'_{ik}\, n_k \big|$

Тензор натяжений Максвелла

$$\mathbf{f} = -\nabla P + \rho\mathbf{E} - \frac{E^2}{8\pi}\nabla\varepsilon + \nabla\left(\frac{E^2}{8\pi}\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)$$



$$T_{ik} = -P\delta_{ik} - \frac{E^2}{8\pi}\left[\varepsilon - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right]\delta_{ik} + \frac{\varepsilon E_i E_k}{4\pi}$$

На границе несжимаемой жидкости с атмосферой:

$$h = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\frac{E^2}{\rho g}$$

$$P - P_{\text{атм}} = -\frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\left(\varepsilon E_n^2 + E_\tau^2\right)$$