518 : 517.91/.94

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПРОГОНКИ К НАХОЖДЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. АБРАМОВ, В. Б. АНДРЕЕВ

(Москва)

А. А. Самарский привлек внимание авторов к следующему вопросу. Ищется периодическое решение линейного дифференциального или разностного уравнения (или системы таких уравнений). Подобные задачи возникают, например, при приближенном решении уравнений с частными производными в цилиндрических координатах. Как применить метод прогонки к решению этой задачи?

В заметке предлагаются два соображения, каждое из которых дает ответ на этот вопрос.

1. Дана система уравнений

$$A\mathbf{y}_n = -\mathbf{f}_n, \tag{1}$$

где $\mathbf{y}_n = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Vmatrix}$, $\mathbf{f}_n = \begin{Vmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{Vmatrix}$, а матрица A_n имеет вид

$$\begin{Vmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -c_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -c_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & -c_n \end{Vmatrix} \tag{2}$$

Присутствие отличных от нуля членов в правом верхнем и левом нижнем углах матрицы (2) не позволяет решать (1) непосредственно методом прогонки *.

Такая алгебраическая задача возникает, например, при решении системы линейных трехчленных уравнений при условии периодичности: $y_{i+n} \equiv y_i$.

Относительно коэффициентов системы будем предполагать, что

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad c_i > a_i + b_i. \tag{3}$$

Применим к решению (1) идею метода окаймления (см. [2], стр. 187—192). Запишем (1) в виде

$$\begin{aligned} A_{n-1}\mathbf{y}_{n-1} + \mathbf{u}_{n-1}y_n &= -\mathbf{f}_{n-1}, \\ \mathbf{v}^*_{n-1}\mathbf{y}_{n-1} - c_n y_n &= -f_n, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$A_{n-1} = \begin{Vmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & -c_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & -c_{n-1} \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

* Изложение этого метода см. в [1], стр. 283—309.

$$\mathbf{u}_{n-1} = \left\| \begin{matrix} a_1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b_{n-1} \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{v}_{n-1} = \left\| \begin{matrix} b_n \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ a_n \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{y}_{n-1} = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{f}_{n-1} = \left\| \begin{matrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{n-1} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда если

$$A_{n-1}\mathbf{p}_{n-1} = -\mathbf{f}_{n-1}, \tag{6}$$

$$A_{n-1}\mathbf{q}_{n-1} = -\mathbf{u}_{n-1}, \tag{7}$$

то

$$\mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{p}_{n-1} + y_n\mathbf{q}_{n-1}, \tag{8}$$

$$y_n = \frac{f_n + \mathbf{v}^*_{n-1}\mathbf{p}_{n-1}}{c_n - \mathbf{v}^*_{n-1}\mathbf{q}_{n-1}}. \tag{9}$$

Матрица A_{n-1} является матрицей Якоби, и решения систем (6) и (7) могут быт получены методом прогонки. Представляя эти решения в виде

$$p_i = \alpha_{i+1}p_{i+1} + \beta_{i+1}, \tag{10}$$

$$q_i = \alpha_{i+1}q_{i+1} + \gamma_{i+1}, \tag{11}$$

получим рекуррентные формулы для прогоночных коэффициентов α_i, β_i, γ_i:

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \qquad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \qquad \gamma_{i+1} = \frac{a_i\gamma_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \tag{12}$$

где индекс i меняется от 2 до n, а

$$\alpha_2 = \frac{b_1}{c_1}, \qquad \beta_2 = \frac{f_1}{c_1}, \qquad \gamma_2 = \frac{a_1}{c_1}. \tag{13}$$

Для обратной прогонки получаем

$$p_{n-1} = \beta_n, \qquad q_{n-1} = \alpha_n + \gamma_n. \tag{14}$$

Таким образом, решение данной системы принимает вид

$$\mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{p}_{n-1} + y_n\mathbf{q}_{n-1}, \tag{8}$$

$$y_n = \frac{\beta_{n+1} + \alpha_{n+1}p_1}{1 - \alpha_{n+1}q_1 - \gamma_{n+1}}. \tag{15}$$

Предлагаемый метод является устойчивым, так как решения (6), (7) ищутся методом прогонки, который устойчив при выполнении условий (3), а знаменатель в выражении (15) не обращается в нуль. Действительно, из (3), (12) и (13) видно, что

$$\alpha_i < 1, \qquad \gamma_i > 0, \qquad \alpha_1 + \gamma_1 < 1. \tag{16}$$

Предполагая $\alpha_i + \gamma_i < 1$, получим

$$\alpha_{i+1} + \gamma_{i+1} = \frac{b_i + a_i\gamma_i}{c_i - a_i\alpha_i} < \frac{b_i + a_i - a_i\alpha_i}{c_i - a_i\alpha_i} < 1. \tag{17}$$

Учитывая (14) и (17), видим, что $q_{n-1} < 1$, а привлекая (11), получаем $q_1 < 1$.

Из всего сказанного следует, что

$$1 - \alpha_{n+1}q_1 - \gamma_{n+1} > 0. \tag{18}$$

Замечание. Иногда может оказаться более удобным не представлять y в виде (8), а искать по рекуррентному соотношению

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} + \gamma_{i+1} y_n, \tag{19}$$

которое получается при подстановке в (8) значений p_i и q_i из (10) и (11). Из (19) также легко видна устойчивость метода.

2. Дано дифференциальное уравнение (или разностное — неважно)

$$\mathbf{y}'(t) + P(t)\,\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{20}$$

где $P = \begin{Vmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{Vmatrix}$ и $\mathbf{f} = \begin{Vmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{Vmatrix}$ — заданные, а $\mathbf{y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Vmatrix}$ — искомая функции; нужно найти решение (20), удовлетворяющее условию

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(1). \tag{21}$$

Пусть мы знаем какую-либо m-точечную краевую задачу

$$\underset{(r)}{S}\,\mathbf{y}(t_r) = \underset{(r)}{l}, \qquad r = 1, \dots, m \tag{22}$$

(здесь $\underset{(r)}{S}$ — матрица, имеющая $\underset{(r)}{n}$ строк и n столбцов, $\underset{(r)}{l}$ — столбец высоты $\underset{(r)}{n}$, $\underset{(1)}{n} + \dots + \underset{(m)}{n} = n$), такую, что при заданных (известных нам) $\underset{(1)}{S}, \dots, \underset{(m)}{S}$ задача (20) — (21) численно устойчива (т. е. хорошо обусловлена) при любых $\underset{(1)}{l}, \dots, \underset{(m)}{l}$. Зафиксируем эти $\underset{(1)}{S}, \dots, \underset{(m)}{S}$ и будем искать $\underset{(1)}{l}, \dots, \underset{(m)}{l}$ такие, чтобы выполнялось (21); этого достаточно для решения поставленной задачи. Прогоним * каждое из условий (22) по всему отрезку [0, 1]. При этом мы получим $\underset{(r)}{S}(t)$ в каждой точке, а так как $\underset{(r)}{l}$ нам не были заданы, то возьмем общее решение для каждого из $\underset{(r)}{l}(t)$ (напомним, что для $\underset{(r)}{l}(t)$ в известных приемах прогонки выписываются линейные уравнения). Мы предположили, что задача (20) — (22) хорошо обусловлена при любых $\underset{(1)}{l}, \dots, \underset{(m)}{l}$, поэтому решение уравнений для каждого $\underset{(r)}{l}(t)$ будет численно устойчивым. Общее решение для $\underset{(r)}{l}(t)$ содержит $\underset{(r)}{n}$ произвольных постоянных, всего подлежат определению $\underset{(r)}{n} + \dots + \underset{(m)}{n} = n$ констант $c_1, \dots, c_n$. Пригнав каждое из условий (22) в точку $t = 0$, мы получим n линейных соотношений между величинами $y_1(0), \dots, y_n(0), c_1, \dots, c_n$. Пригнав каждое из условий (22) в точку $t = 1$, мы получим n линейных соотношений между величинами $y_1(1), \dots, y_n(1), c_1, \dots, c_n$. Вспомнив (21), видим, что мы получили $2n$ линейных соотношений между $2n$ величинами. Если предположим, что задача (20) — (21) была хорошо обусловлена, то мы должны получить хорошо обусловленную алгебраическую задачу решения линейной системы порядка $2n$.

Высказанные соображения остаются, очевидно, в силе и при решении более общей, чем (21), краевой задачи. Указанным приемом можно решать многоточечную краевую задачу, в которой линейно связаны значения $\mathbf{y}$ в различных точках. Если вместо (20) рассматривается однородное уравнение

$$\mathbf{y}'(t) + P(t, \lambda)\,\mathbf{y}(t) = 0, \tag{23}$$

где P зависит от параметра λ, который выбирается таким образом, чтобы задача (23) — (21) имела нетривиальное решение, то пристрелку по λ ведем таким образом, чтобы упоминаемая выше линейная алгебраическая система порядка $2n$ (в этом случае она будет однородной) имела нетривиальное решение.

---

* С помощью классической прогонки, если она применима, или с помощью какой-либо модификации прогонки — неважно.

П р и м е р. Найти скалярную функцию $y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, удовлетворяющую уравнению

$$y''(t) - p(t)\, y(t) = f(t) \tag{24}$$

(здесь $p(t)$, $f(t)$ — заданные (непрерывные) на $[0, 1]$ функции, $p(t) > 0$) и условию

$$y(0) = y(1), \qquad y'(0) = y'(1). \tag{25}$$

Возьмем произвольное неотрицательное число $\alpha_1^{(0)}$. Тогда при $t = 0$ будем иметь

$$y'(0) = \alpha_1^{(0)} y(0) + \beta_1^{(0)}, \tag{26}$$

где $\beta_1^{(0)}$ мы не знаем. Прогоним условие (26) от 0 к 1, т. е. определим на $[0, 1]$ функции $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$ — решения уравнений

$$\alpha_1' + \alpha_1^2 - p = 0, \tag{27}$$

$$\beta_1' + \alpha_1\beta_1 = f, \tag{28}$$

удовлетворяющие условиям

$$\alpha_1(0) = \alpha_1^{(0)}, \qquad \beta_1(0) = \beta_1^{(0)}. \tag{29}$$

Как известно, при этом $\alpha_1(t) > 0$ при $0 < t \leqslant 1$ и $\beta_1(t) = \widetilde{\beta}_1(t) + c_1\gamma_1(t)$, где $\beta_1(t)$ — какое-либо частное решение уравнения (28), $\gamma_1(t)$ — какое-либо нетривиальное решение уравнения

$$\gamma_1' + \alpha_1\gamma_1 = 0, \tag{30}$$

а c_1 — пока не известная нам константа. Функции $\alpha_1(t)$, $\widetilde{\beta}_1(t)$, $\gamma_1(t)$ устойчиво вычисляются и «хорошо» себя ведут.

Возьмем далее произвольное неположительное число $\alpha_2^{(0)}$. Тогда при $t = 1$ мы будем иметь

$$y'(1) = \alpha_2^{(0)} y(1) + \beta_2^{(0)}, \tag{31}$$

где $\beta_2^{(0)}$ мы не знаем. Прогоним условие (31) от 1 к 0, т. е. определим на $[0, 1]$ функции $\alpha_2(t)$, $\beta_2(t)$ — решения уравнений

$$\alpha_2' + \alpha_2^2 - p = 0, \tag{32}$$

$$\beta_2' + \alpha_2\beta_2 = f, \tag{33}$$

удовлетворяющие условиям

$$\alpha_2(1) = \alpha_2^{(0)}, \qquad \beta_2(1) = \beta_2^{(0)}. \tag{34}$$

Тогда $\alpha_2(t) < 0$ при $0 \leqslant t < 1$ и $\beta_2(t) = \widetilde{\beta}_2(t) + c_2\gamma_2(t)$, где $\widetilde{\beta}_2(t)$ — какое-либо частное решение уравнения (33), $\gamma_2(t)$ — какое-либо нетривиальное решение уравнения

$$\gamma_2' + \alpha_2\gamma_2 = 0, \tag{35}$$

а c_2 — пока не известная нам константа. Функции $\alpha_2(t)$, $\widetilde{\beta}_2(t)$, $\gamma_2(t)$ устойчиво вычисляются и «хорошо» себя ведут.

Условие (25) дает нам для $y_0' = y'(0) = y'(1)$ и $y_0 = y(0) = y(1)$ соотношения:

$$\begin{aligned}
y_0' &= \alpha_1(0)\, y_0 + \widetilde{\beta}_1(0) + c_1\gamma_1(0) \\
y_0' &= \alpha_1(1)\, y_0 + \widetilde{\beta}_1(1) + c_1\gamma_1(1) \\
y_0' &= \alpha_2(0)\, y_0 + \widetilde{\beta}_2(0) + c_2\gamma_2(0) \\
y_0' &= \alpha_2(1)\, y_0 + \widetilde{\beta}_2(1) + c_2\gamma_2(1).
\end{aligned} \tag{36}$$

Это четыре линейных алгебраических уравнения с четырьмя неизвестными y_0', y_0, c_1, c_2. Все величины, определяющие эту систему, получены в результате устойчивого счета и имеют нормальный диапазон изменения. Поэтому для того, чтобы эта система была хорошо обусловлена, достаточно, чтобы ее определитель D не был близок к нулю. Как легко подсчитать,

$$D = \gamma_1(0)\,\gamma_2(1)\left[\left(1 - e^{\int_0^1 \alpha_2(\tau)\,d\tau}\right)\int_0^1 p(t)\, e^{-\int_t^1 \alpha_1(\tau)\,d\tau}\,dt + \right. \tag{37}$$

$$\left. + \left(1 - e^{-\int_0^1 \alpha_1(\tau)\,d\tau}\right)\int_0^1 p(t)\, e^{\int_0^t \alpha_2(\tau)\,d\tau}\,dt\right].$$

Каждое из двух слагаемых, стоящих внутри квадратных скобок в правой части (37), положительно и не близко к нулю. Так как мы берем величины $\gamma_1(0)$ и $\gamma_2(1)$ не малыми, то D не близко к нулю.

Поступила в редакцию
23.11.1962

Цитированная литература

1. С. К. Годунов, В. С. Рябенький. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
2. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.

---

517 : 949.2

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ «КОСЫХ» РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

В. Б. БАЛАКИН

(Москва)

1. Изучение устойчивости разностных схем обычно производится на модельных задачах — линейных с постоянными коэффициентами, в определенном смысле похожих на исходную задачу. Рассматриваемая ниже гиперболическая система может считаться модельной для уравнений газовой динамики. Для изучения устойчивости применяется метод преобразования Фурье в форме, изложенной в книге Рихтмайера [1].

Особенностью является применение метода Фурье к «косым» схемам. Такие разностные схемы могут быть описаны уравнением

$$\sum_k a_k u_{m+\delta+k}^{n+1} = \sum_l b_l u_{m+l}^n, \tag{1}$$

где a_k, b_l — матрицы коэффициентов, u_m^n — вектор-решение, m — пространственный индекс (вектор), $\delta = \delta(n)$ — индекс сдвига n-го слоя. В (1) подразумевается индексация относительно прямоугольной сетки с теми же шагами по x и по t, что и у «косой».

Перейдем в (1) к преобразованию Фурье:

$$u_m^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi^n(\varphi)\, e^{im\varphi} d\varphi. \tag{2}$$