

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра высшей математики физического факультета

А. П. УЛЬЯНОВ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ФИЗИКОВ

Часть 4. Интегрирование в пространстве

Учебно-методическое пособие
по курсу основ математического анализа

Новосибирск
~~2013~~ 2018

УДК: 510

ББК: В14я73-1 + В151.54я73-1

У 517

Ульянов А. П. Основы математического анализа для студентов-физиков. Часть 4. Интегрирование в пространстве. Учеб.-метод. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013.

ISBN ??

Пособие содержит конспект лекций, прочитанных автором для студентов 1-го курса физического и геолого-геофизического факультетов НГУ. Ввиду большого объёма курса и разнообразия материала пособие разделено на несколько частей. Часть 4 включает следующие темы: двойные и тройные интегралы; интегралы по линиям и поверхностям; несобственные интегралы; интегралы с параметром.

Пособие предназначено для студентов первого курса физического и геолого-геофизического факультетов НГУ.

Рецензент

проф. В.А. Александров

Учебно-методическое пособие подготовлено в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009-2018 гг.

Версия от 13 апреля 2018 г.

© Ульянов А. П., 2013

© Новосибирский государственный университет, 2013

Глава 12. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ 1

12.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И МЕХАНИЧЕСКАЯ МОТИВАЦИЯ

Все величины, выражаемые интегралами, и в том числе геометрические и физические, обладают тремя естественными свойствами. Строгие построения разнообразных типов интеграла должны быть такими, чтобы все его типы имели три самых общих свойства. Они уже знакомы нам по обычным интегралам на отрезке, а также по несобственным интегралам.

Аддитивность: когда множество состоит из нескольких кусков, интеграл функции по нему равен сумме её интегралов по этим кускам.

Линейность: когда функция состоит из нескольких слагаемых, её интеграл равен сумме интегралов слагаемых.

Монотонность: когда функция неотрицательна, её интеграл неотрицателен.

Вычисление объёмов. Определённый интеграл появился как средство для вычисления площади под графиком функции $f(x)$ на отрезке:

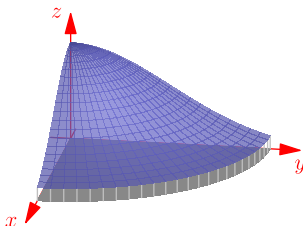
$$S = \int_{\Delta} f(x) dx.$$

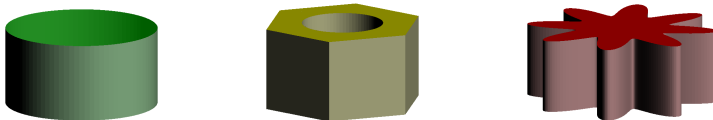
Несложно применять его к вычислению площадей других плоских фигур, представляя их состоящими из нескольких подграфиков.

Аналогично можно говорить о подграфике функции f на плоской области D . Это трёхмерное тело, имеющее объём. Как его вычислять? Вот это и должен быть двойной интеграл

$$V = \iint_D f dS.$$

Здесь dS обозначает **элемент площади**; его конкретное выражение зависит от используемой системы координат и обсуждается позже.

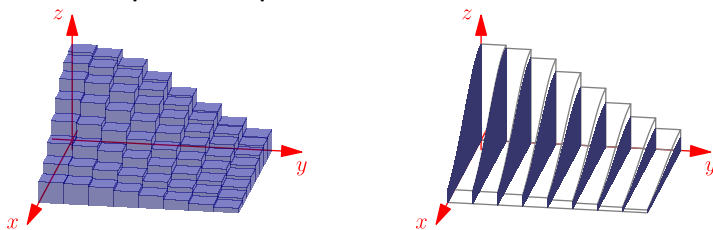




Объёмы некоторых простых тел находятся без двойного интегрирования: объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин его сторон; объём цилиндра равен произведению его высоты на площадь основания, причём независимо от формы основания.

Кратные и повторные интегралы. В общем же случае приближённое значение объёма получается разбиением всего тела на небольшие тонкие кусочки. Это можно делать по-разному. Например, можно разбить область D на небольшие подобласти, приблизить объём тонкого столбика над каждой из них объёмом цилиндра близкой высоты, а затем последние сложить. В интегральном исчислении результат будет называться интегральной суммой для **двойного интеграла**.

Другой способ разбиения тела: разрезать его на тонкие слои, приблизить объём каждого слоя произведением площади сечения на толщину слоя, затем эти произведения сложить. После предельного перехода при уменьшении толщины слоёв к нулю объём представляется интегралом от функции, равной площади сечений. Именно так мы получили формулу для объёма тела вращения. Поскольку в общем случае площади сечений тоже вычисляются интегралами, этот подход называют **повторным интегралом**.



Объём тела не может зависеть от способа его вычисления. Поэтому повторный и двойной интегралы должны совпадать хотя бы для достаточно хороших функций на достаточно приличной области. Это даёт самый важный способ вычисления двойных интегралов.

Вычисление масс и моментов. Возьмём в качестве области D неоднородную пластину. Масса Δm небольшого её кусочка площади ΔS равна произведению средней (поверхностной) плотности кусочка на

его площадь. Сжимая рассматриваемый кусочек к одной точке, в пределе отношения $\Delta m/\Delta S$ получим плотность пластины σ в этой точке. Также пишут $dm = \sigma dS$. Площадь и масса всей пластины равны

$$S = \iint_D dS, \quad m = \iint_D dm = \iint_D \sigma dS.$$

Теперь возьмём неоднородное трёхмерное тело T . Его плотность ρ в точке есть предел отношения массы Δm небольшого кусочка тела (с этой точкой внутри) к объёму кусочка ΔV . Тогда $dm = \rho dV$, а для вычисления объёма и массы всего тела нужны **тройные интегралы**

$$V = \iiint_T dV, \quad m = \iiint_T \rho dV.$$

Также через тройные интегралы определяются другие механические величины, связанные с распределением массы в пространстве: моменты. Статический момент маленького кусочка тела относительно какой-либо плоскости приближённо равен его массе на расстояние до плоскости. Например, в декартовых координатах статический момент тела относительно плоскости Oxy равен

$$M_{xy} = \iiint_T z \rho dV.$$

Аналогично, момент инерции тела относительно оси Ox равен

$$I_{xx} = \iiint_T (y^2 + z^2) \rho dV.$$

Для конкретных тел наличие симметрии часто позволяет обойтись вычислением двойного или обычного интеграла, так что исходный тройной интеграл остаётся «за кадром».

Наконец, масса и заряд бывают распределены по линии или поверхности. Возникают новые типы интегралов: криволинейные и поверхностные. При вычислениях обычно выбором параметризации линии или поверхности они сводятся соответственно к обычным и двойным интегралам. Как инструмент теории, криволинейные и поверхностные интегралы особенно важны в векторном анализе.

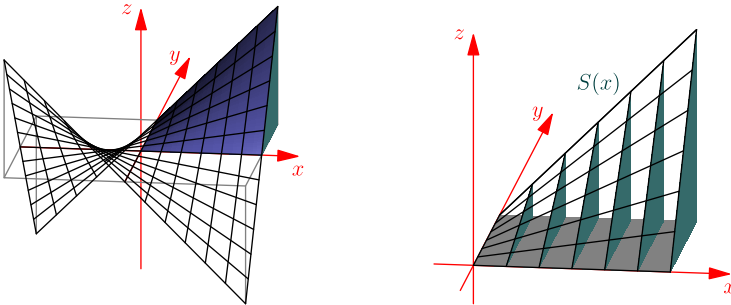
12.2. СВЕДЕНИЕ К ПОВТОРНОМУ ИНТЕГРАЛУ

Посмотрим на примерах особенности традиционной записи при вычислении кратного интеграла путём сведения его к повторному. Заботиться о строгих обоснованиях нам ещё рано, но все функции и области

здесь весьма просты, поэтому мотивированной интуиции пока достаточно. Тем не менее, в конце главы мы уже выйдем в пространство высокой размерности.

Интеграл по прямоугольнику. Основные трудности первоначально вызывает представление области в виде, удобном для установления пределов интегрирования. Поэтому начнём с того случая, в котором этот шаг максимально упрощается.

Пример. Вычислим объём под графиком функции $z = xy$ (гиперболический параболоид) на единичном квадрате $C = [0, 1] \times [0, 1]$.



Представим объём интегралом от площади $S(x)$ сечения подграфика плоскостью $\{x = \text{const}\}$. Поскольку здесь $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$, пределы обоих интегрирований сразу ясны:

$$V = \int_0^1 S(x) dx, \quad S(x) = \int_0^1 xy dy.$$

Сами интегралы здесь тоже просты: $S(x) = x/2$ и далее $V = 1/4$. Однако подставим один интеграл в другой и пожонглируем символами:

$$\begin{aligned} V &= \iint_C z dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 y dy \right) x dx \\ &= \left(\int_0^1 y dy \right) \left(\int_0^1 x dx \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Оба раза выделенные фрагменты не зависят от переменной интегрирования, поэтому они выносятся из-под интеграла, будто константы.

Этот пример иллюстрирует единственный случай, когда двойной интеграл гарантированно равен произведению двух интегралов по раз-

ным переменным. Для этого достаточно, чтобы функция была таким произведением и область интегрирования была прямоугольником:

$$\iint_{P \times Q} f(x)g(y) \, dx \, dy = \left(\int_P f(x) \, dx \right) \left(\int_Q g(y) \, dy \right).$$

Нередко такие интегралы возникают после перехода к полярным координатам; первые примеры мы увидим, познакомившись с формулой замены переменных.

Интеграл по криволинейной трапеции. Чаще пределы внутреннего интегрирования не постоянны, а зависят от внешней переменной:

$$V = \int_a^b S(x) \, dx, \quad S(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy.$$

Такой повторный интеграл соответствует рассечению области

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

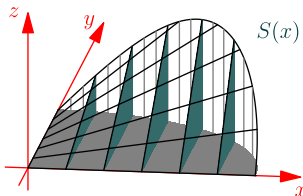
называемой **криволинейной трапецией**. Поэтому в задачах прежде всего стремятся записать область в таком виде или разбить её на части, для которых это удаётся.

Пример. Вычислим объём под графиком той же функции $z = xy$ над четвертью единичного круга, расположенной в первом квадранте:

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Начинаем с представления области в удобном виде

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$



Затем считаем площади сечений и интегрируем их. Как и выше, сперва запишем вычисление, подчёркивая его двухшаговый характер:

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy = x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2); \\ V &= \int_0^1 S(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x-x^3) \, dx = \dots = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Традиционно сразу учатся проводить такие вычисления, вообще не вводя функцию $S(x)$, а подставляя один интеграл в другой:

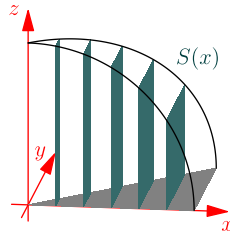
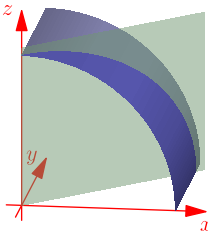
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Отличие от прежней задачи на квадрате в том, что во внутреннем интеграле по y пределы зависят от x , поэтому вынести его из внешнего нельзя. Чтобы интегрировать в другом порядке, нужно представить саму область иначе. Хотя тут это удаётся,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\},$$

отличие от первого представления лишь в обмене букв местами.

Пример. Вычислим ещё один несложный объём. Тело ограничено первым октантом, плоскостью $x = y$ и круговым цилиндром $x^2 + z^2 = 1$. Здесь накладывается характерная дополнительная сложность: успех в решении задачи во многом определяется правильным видением геометрической ситуации.



Вообще, на старте полезно подумать, по каким переменным выгодно интегрировать. Однако в этой задаче очевидный вариант проходит без проблем. Определяем область интегрирования — треугольник

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\},$$

и подынтегральную функцию $z = \sqrt{1-x^2}$. Значит,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \left(\int_0^x \sqrt{1-x^2} \, dy \right) = \int_0^1 dx \left(\sqrt{1-x^2} \int_0^x dy \right) \\ &= \int_0^1 dx \sqrt{1-x^2} x = (\text{замена}) \cdots = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Здесь мы записываем dx поближе к «его» интегралу. Так удобнее, если подынтегральное выражение длинное, и особенно если оно содержит внутренние интегралы. Серые скобки при этом часто опускают.

Разные сечения. Как уже отмечалось в примерах, сводя двойной интеграл к повторному без привлечения смены координат, сечения подграфика функции на простой двумерной области можно делать двумя способами. Варианты внешнего интеграла тогда имеют вид

$$\int_{\Delta_1} S_1(x) dx, \quad \int_{\Delta_2} S_2(y) dy.$$

Это называют выбором порядка интегрирования.

Часто лишь в одном из вариантов интеграл вычислить легко. Препятствием в другом варианте, помимо и ещё до обычного вычисления интегралов, может быть сложность представления области: ограничивающие её линии нужно суметь задать как $y(x)$ либо $x(y)$.

Отмеченные трудности ещё возрастают для тройных интегралов

$$I = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz.$$

Сечения трёхмерной области можно делать многими способами. Они приводят к внешним интегралам как обычным,

$$I = \int_{\Delta_1} J_1(x) dx, \quad J_1(x) = \iint_{D_1(x)} f(x, y, z) dy dz,$$

так и двойным:

$$I = \iint_{D_2} J_2(x, y) dx dy, \quad J_2(x, y) = \int_{\Delta_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

В обоих случаях имеется выбор порядка интегрирования, увеличивающий разнообразие вариантов.

Пример. Найдём объём цилиндрического клина из предыдущего примера иным сведением тройного интеграла к повторному. А именно, вычислим (опять же сводя к повторному) двойной интеграл

$$V = \iiint_T dV = \iint_D f(x, z) dx dz$$

от функции

$$f(x, z) = \int_0^x dy = x$$

по четверти круга в плоскости Oxz ,

$$D = \{(x, z) \mid x \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Этим путём ответ достигается даже проще, чем раньше:

$$V = \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - z^2) dz = \frac{1}{3}.$$

Пример (свод). В готической архитектуре можно увидеть своды, образованные пересечением двух цилиндров. Найдём объём такого тела

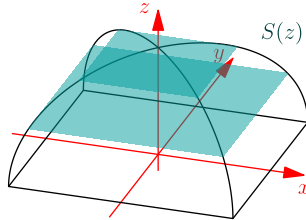
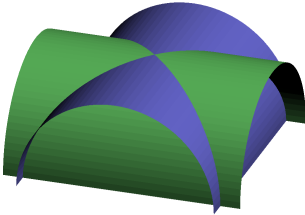
07.04.18

$$T = \{(x, y, z) \mid z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\},$$

представив его интегралом от площади горизонтальных сечений:

$$V = \int_0^1 S(z) dz, \quad S(z) = \iint_{D_z} dx dy.$$

Секрет успеха тут в том, что эти сечения — квадраты со сторонами $2\sqrt{1-z^2}$. Поэтому $S(z) = 4(1-z^2)$, откуда получим $V = 8/3$.



Найдём заодно для однородного тела T статический момент

$$M_{xy} = \iiint_T z dV = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} z dx dy \right) dz = \int_0^1 z S(z) dz = \dots = 1.$$

Значит, его центр тяжести находится в точке с координатами $(0, 0, 3/8)$.

Упражнение (Архимед). *Вычислите объём свода, не интегрируя.*

12.3. ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

Вид элемента площади. В декартовой системе координат площадь маленького прямоугольничка со сторонами Δx и Δy равна $\Delta x \Delta y$. При устремлении длин обеих сторон к нулю получается элемент площади $dS = dx dy$.

Область может иметь простое выражение в другой системе координат, часто в полярной. Тогда бывает выгодно заменить переменные

подынтегральной функции и вычислять повторный интеграл в удобных координатах. После замены элемент площади выглядит иначе. Например, в полярных координатах (ρ, φ) он равен $dS = \rho d\rho d\varphi$. Здесь ρ является модулем якобиана отображения $(\rho, \varphi) \mapsto (x, y)$,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

и таково общее правило для записи элемента площади:

$$dS = dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta.$$

Напомним, что с появлением якобианов гладких отображений в самом конце первого семестра мы сразу обсуждали геометрический смысл якобиана как коэффициента искажения площади при отображении, а также объёма и многомерного объёма в общем случае. В этой главе мы игнорируем ориентацию области и её смену, поэтому все якобианы берём по модулю.

Пример. Найдём момент инерции однородной круглой (плоской) пластины радиуса r при вращении в пространстве вокруг одного из своих диаметров. Считаем поверхностную плотность пластины единичной. За ось вращения возьмём Oy . В полярных координатах получим

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_D x^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^r (\rho \cos \varphi)^2 \rho d\rho d\varphi \\ &= \int_0^r \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \dots = \pi r^4 / 4. \end{aligned}$$

Учитывая, что масса m пластины равна πr^2 , ответ можно записать в виде $I_y = mr^2/4$.

Пример (лемниската Бернулли). Найдём массу однородной пластины единичной поверхностной плотности, ограниченной линией

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

Заниматься этим в декартовых координатах неудобно, но переход к полярным напрашивается из-за присутствия $x^2 + y^2$ в уравнении. Подставляя туда $x = \rho \cos \varphi$ и $y = \rho \sin \varphi$, затем сокращая на ρ^2 , получим

$$\rho^2 = \cos 2\varphi.$$

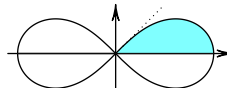
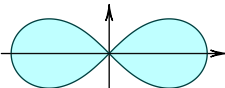


График приближается к нулю при $\varphi \rightarrow \pm\pi/4$. Учитывая симметрию лемнискаты относительно осей, запишем область интегрирования:

$$\Delta = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq \sqrt{\cos 2\varphi}\}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} M &= \iint_D dS = \iint_{\Delta} \rho \, d\rho \, d\varphi = 4 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho \, d\rho \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} d\varphi \left(\frac{1}{2} \cos 2\varphi\right) = \dots = 1. \end{aligned}$$

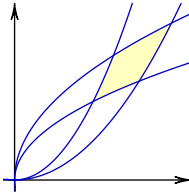
Аналогично можно найти момент инерции той же пластины относительно оси Oz :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \rho^2 dS = \iint_{\Delta} \rho^3 \, d\rho \, d\varphi = 4 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3 \, d\rho \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} d\varphi \left(\frac{1}{4} \cos^2 2\varphi\right) = \dots = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Введение подходящей системы координат. Стандартные системы координат помогают не во всех задачах. Случается, что до удобной замены приходится догадываться. При этом выгодно стараться представить границу области в новых координатах как можно проще.

Пример. Вычислим площадь области, ограниченной четырьмя парабололами:

$$D = \{(x, y) \mid x^2/2 \leq y \leq x^2, y^2/2 \leq x \leq y^2\}.$$



Судя по её виду, координатные линии $\{\xi = \text{const}\}$ и $\{\eta = \text{const}\}$ новой системы должны быть парабололами. Перепишем условия:

$$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2/y \leq 2, 1 \leq y^2/x \leq 2\}.$$

Логично положить $\xi = x^2/y$ и $\eta = y^2/x$: тогда нужная область Δ плоскости (ξ, η) будет квадратом $[1, 2] \times [1, 2]$.

В формулу замены переменных входит якобиан (x, y) по (ξ, η) , но мы пока не знаем функций $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$. Вместо решения нелинейной

системы, проще найти обратный якобиан:

$$J^{-1} = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x/y & -y^2/x^2 \\ -x^2/y^2 & 2y/x \end{vmatrix} = 3.$$

Значит,

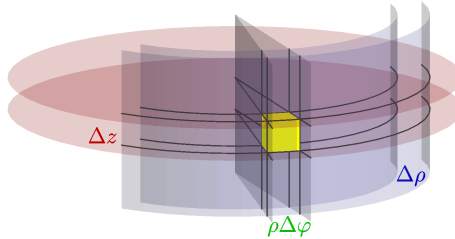
$$S(D) = \iint_D dx dy = \iint_{\Delta} |J| d\xi d\eta = \frac{1}{3} S(\Delta) = \frac{1}{3}.$$

Вид элемента объёма. В трёхмерном пространстве определён элемент объёма dV . В декартовых координатах $dV = dx dy dz$, а в иных его выражение включает модуль якобиана:

$$dV = dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta.$$

Полезно помнить якобианы основных систем координат, которые нам уже встречались: цилиндрической и сферической.

01.05.17
перенёс!



Пример. Цилиндрическая система координат (ρ, φ, z) связана с декартовой (x, y, z) формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

и в ней $dV = \rho d\rho d\varphi dz$. Это легко установить, ибо для полярных координат уже известно равенство $dx dy = \rho d\rho d\varphi$, и остаётся умножить его на dz .

Пример. Сферическую систему координат вводят немного по-разному, поэтому стоит привыкнуть всегда обращать внимание на смысл букв и формулы связи с декартовыми координатами.

В физике стандартизирована сферическая система (r, θ, φ) , пришедшая из астрономии: расстояние, зенитный угол, азимут. Тут зенитный

угол θ отсчитывается от зенита (аналога северного полюса). Тогда

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

В иных сферических системах, помимо отличия в отсчёте одного из углов, могут быть переставлены местами обозначения углов. Порядок записи углов важен, ибо от него зависит, будет система правой или левой; физики же всегда стараются работать в правой системе.

Мне больше нравится система (r, φ, θ) принятая в географии, с отсчётом широты θ от экватора. Тогда

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi, \\ y = r \cos \theta \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta. \end{cases}$$

Формулы перехода можно разбить на два перехода к цилиндрическим координатам, причём первый стандартен:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z; \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = r \cos \theta, \\ \varphi = \varphi, \\ z = r \sin \theta. \end{cases}$$

Значит, вторая тройка равенств связывает стандартную цилиндрическую и географическую сферическую системы.

элемент объема в сферических координатах

На сфере радиуса r длина дуги меридиана равна $r d\theta$, а длина дуги параллели на широте θ равна $r \cos \theta d\varphi$. Перемножая их, вместе с dr , получим $dV = r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta$.

Упражнение. Выразите элемент объёма в астрономической системе и сравните с географической.

Упражнение. Честно посчитайте якобиан сферической системы.

Пример. Найдём координаты (x_0, y_0, z_0) центра масс части однородного единичного шара, находящейся в первом октанте.

восьмушка шара

Ввиду симметрии, $x_0 = y_0 = z_0$. Искомые координаты находятся через статические моменты и массу: $z_0 = M_z/M$. Постоянная плотность вынесется из-под интегралов и сократится, поэтому сразу забудем о ней, считая, что $\rho = 1$. Масса находится без явного интегрирования из объёма шара: $M = \frac{1}{8}\rho V = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi}{6}$.

Попробуем сначала найти статический момент в декартовых координатах. От задания тела неравенствами

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

перейдём к виду, удобному для сведения интеграла к повторному, сначала по z , потом по y , и наконец по x :

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} M_z &= \iiint_T z \, dV = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \frac{1}{2}(1-x^2-y^2) \\ &= \dots = \int_0^1 dx \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Теперь нужна замена, сводящая интеграл к тригонометрии или бета-функции. Интеграл берётся, но этот путь не самый лёгкий; учитеесь вовремя находить иной.

Проще отсунуть к двойному интегралу по четверти D единичного круга в плоскости Oxy и в нём перейти к полярным координатам:

$$\begin{aligned} M_z &= \iint_D dx \, dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho \, d\rho \frac{1}{2}(1-\rho^2) \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 d\rho (1-\rho^2) = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Это вычисление совпадает с тем, что было бы в цилиндрических координатах.

Но всё же, самый быстрый способ в этой задаче — в сферических координатах (r, φ, θ) . Тело задаётся неравенствами

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2,$$

а подынтегральная функция $z|J|$ есть $r^3 \cos \theta \sin \theta$. Значит,

$$M_z = \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

Вспоминаем, что мы хотели найти координаты центра масс:

$$x_0 = y_0 = z_0 = M_z/M = 3/8.$$

12.4. ИНТЕГРАЛЫ ПО ЛИНИЯМ И ПОВЕРХНОСТЯМ

Параметризованная линия. Возьмём участок гладкой линии в \mathbb{R}^3 с параметризацией $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Если параметр t обозначает время, то $\dot{\mathbf{r}}(t)$ есть скорость движения точки по линии. Поэтому длина участка траектории (дуги) есть пройденный путь

$$L = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt.$$

Подынтегральное выражение $|d\mathbf{r}|$ называют элементом ds длины дуги. В силу инвариантности формы первого дифференциала, $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(u) du$ и для любой другой гладкой параметризации $\mathbf{r}(u)$. Поэтому формула для длины дуги также инвариантна.

Представим теперь, что по дуге распределена некоторая масса. Её линейная плотность ϱ является функцией точки. Масса дуги должна быть интегралом

$$m = \int_a^b \varrho(\mathbf{r}(t)) |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt.$$

Подставляя вместо ϱ соответствующие функции, легко написать формулы для вычисления механических моментов участка линии.

Таким образом, выбором параметризации интегрирование по линии сводится к обычному интегрированию по отрезку. Если в задаче даётся или появляется не параметризованная гладкая линия, то, как правило, приходится сперва отыскивать параметризацию.

Упражнение. Подставляя разные координатные системы, получите формулы в каждом случае:

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (\text{декартова});$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (\text{цилиндрическая});$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \cos \theta)^2 \dot{\varphi}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2} dt \quad (\text{сферическая}).$$

Присутствие в формуле квадратного корня портит подынтегральное выражение настолько, что естественных и полезных линий, вычисление длин которых доводится до явного числа, очень мало. Зато на этом пути появилось несколько неэлементарных функций.

Пример. Любой кусок графика функции $y = \operatorname{sh} x$ называют **цепной линией**, ибо такую форму принимает закреплённая в двух точках цепь или нерастяжимая нить. Параметром считаем $x \in [a, b]$. Тогда

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_a^b \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a.$$

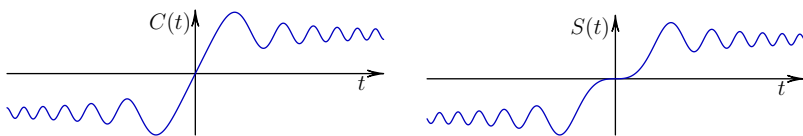
оставил
старые
рисунок

цепная линия и архимедова спираль

Пример. Плоская линия с полярным уравнением $\rho = k\varphi$ называется **спиралью Архимеда**. Постоянная k контролирует сжатость спирали. Для нахождения длины воспользуемся «цилиндрической» формулой с $\dot{z} = 0$. Впрочем, её полезно отдельно помнить. Параметром t является φ . Тогда $\dot{\rho} = \dot{\varphi} = 1$ и длина первого оборота спирали равна

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi.$$

Интеграл берётся гиперболической подстановкой $\varphi = \operatorname{sh} u$. Ответ содержит квадратные корни и логарифм, через которые выражается обратная функция $u = \operatorname{Arsh} \varphi$.



Пример. При вычислении длины эллипса, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $a < b$ возникает неэлементарный интеграл

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2) \sin^2 t} dt.$$

Заменой букв получается **эллиптическая функция** от эксцентриситета k :

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$$

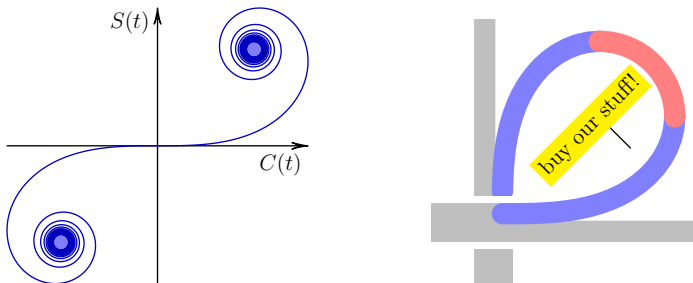
Вивiani?

Пример. Плоскую линию с параметризацией $(C(t), S(t))$, заданной интегралами Френеля

$$C(t) = \int_0^t \cos(s^2) ds, \quad S(t) = \int_0^t \sin(s^2) ds,$$

называют **клотоидой**, или **спиралью Корню**. Длина её участка $0 \leq t \leq L$ равна L , поскольку $dx^2 + dy^2 = dt^2$. При $L \rightarrow +\infty$ эта линия крутится тесной спиралью без самопересечений. Предельную точку (центр вращения) находят методами, нам ещё не доступными.

рисунок



Спираль Корню появилась в оптике при исследовании дифракции. Кроме того, как легко вычислить по общей формуле

$$\kappa(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'x' + y'y')^{3/2}}$$

для параметризованных плоских линий, её кривизна в точке $t = L$ равна $2L$. Благодаря этой пропорциональности короткие её участки применяют в дорожном строительстве для плавного перехода между участками неравных постоянных кривизн — прямыми и **окружностей**.

Параметризованная поверхность. Возьмём в \mathbb{R}^3 кусок гладкой поверхности Σ , параметризованный $\mathbf{r}(u, v)$ с областью изменения параметров D (лучше компактной).

лекция 8
09.03.17

сетка координат на поверхности

Площадь поверхности Σ должна быть двойным интегралом

$$\iint_{\Sigma} dS$$

от элемента площади dS , равного площади бесконечно малого параллелограмма на касательных векторах $\mathbf{r}_u du$ и $\mathbf{r}_v dv$. Поэтому

рисунок

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

В частности, площадь куска поверхности вычисляется как

$$S = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

Раскрывая векторное произведение, получим серию формул для практических вычислений, приведённых ниже.

косинусы?

Лемма. Элемент площади поверхности не зависит от её параметризации.

Доказательство. Возьмём две гладких параметризации куска поверхности: $\mathbf{r}(u, v)$, $D \rightarrow \Sigma$ и $\mathbf{r}(\xi, \eta)$, $\Delta \rightarrow \Sigma$. Из этих отображений составим диффеоморфизм $\Delta \rightarrow \Sigma \rightarrow D$, $(\xi, \eta) \mapsto (u, v)$.

рисунок

две сетки на поверхности

Теперь преобразуем $\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta$, дифференцируя \mathbf{r} как сложную функцию $\mathbf{r}(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$. Раскроем векторное произведение, пользуясь его

билинейностью и антикоммутативностью:

$$\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta = (\mathbf{r}_u u_\xi + \mathbf{r}_v v_\xi) \times (\mathbf{r}_u u_\eta + \mathbf{r}_v v_\eta) = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v (u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi).$$

Замечаем, что появился якобиан. Учитывая уже известное правило замены переменных

$$du dv = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta$$

в элементе площади плоской области, приходим к равенству

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv = |\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta| d\xi d\eta,$$

выражающему искомую независимость. \square

Переходя к поверхности неоднородной плотности ρ , видим, что её масса вычисляется двойным интегралом

$$m = \iint_{\Sigma} \rho dS = \iint_D \rho(u, v) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv.$$

Подставляя вместо ρ соответствующие функции, легко написать формулы для вычисления механических моментов поверхности.

Как и для криволинейных интегралов, и даже ещё чаще, практические вычисления для конкретных поверхностей зачастую наталкиваются на невозможность выразить ответ в элементарных функциях, но в задачниках представлены наиболее полезные исключения.

Вид элемента площади поверхности. Не возбраняется применять исходную формулу с векторным произведением, а иногда даже удобно. Обойтись без этого вычисления позволяет серия формул для поверхностей с одним из основных типов задания.

Пример (полусфера). Параметризуем верхнюю половину единичной сферы длиной φ и шириной θ (в ролях букв u и v):

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Находим частные производные и затем их векторное произведение:

$$\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & -\cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi \\ \mathbf{j} & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \mathbf{k} & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \cos \varphi \\ \cos^2 \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \theta \end{bmatrix}.$$

При взятии модуля тригонометрия упрощается: $|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| = \cos \theta$. Отсюда получаем (ожидаемое) значение площади

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 2\pi.$$

Для явно заданной поверхности $z = z(x, y)$ применяют формулу

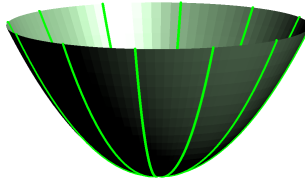
$$dS = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy.$$

Действительно, в этом случае $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-z_x, -z_y, 1)$.

Пример (параболоид вращения). Для поверхности $z = x^2 + y^2 \leq 1$, параметризованной этим явным заданием $z(x, y)$ в декартовых координатах, $z_x = 2x$ и $z_y = 2y$. Под интегралом $\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$, и следует перейти к полярным координатам:

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho = \dots = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

Интеграл берётся подстановкой $t = 1 + 4\rho^2$.



Для параметризованных поверхностей применяют формулу Гаусса:

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

где $E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u$, $F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v$ и $G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$.

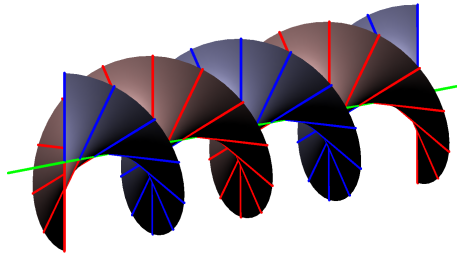
Упражнение. Выведите эту формулу с помощью равенства

$$\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2$$

из векторной алгебры.

Буквы E , F и G здесь стандартны, от самого Гаусса, но студенты часто путают их. Чтобы этого избежать, можно запомнить, что

$$EG - F^2 = \det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \end{bmatrix}.$$



Пример (геликоид, или винтовая поверхность). Поверхность задается прямой, движущейся поступательно и одновременно вращающейся, причём скорость центра вращения и угловая скорость постоянны и **коллинеарны**, а также ортогональны движущейся **прямой**.

Параметризуем её, беря выделенное направление за ось z :

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_u = \begin{bmatrix} -v \sin u \\ v \cos u \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_v = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = 1 + v^2, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0, \quad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = 1,$$

и площадь куска геликоида радиуса 1 с одним полным оборотом равна

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} du \int_{-1}^1 \sqrt{EG - F^2} dv &= \int_0^{2\pi} du \int_{-1}^1 \sqrt{1 + v^2} dv = \dots \\ &= 2\pi (\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Упражнение. При параметризации $\mathbf{r}(u, v)$ выведите формулу

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

в декартовых координатах, где

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Не столь широко известен вид элемента площади поверхности, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$. Ограничившись куском, где $F_z \neq 0$ и потому теоретически возможно явное задание $z = z(x, y)$, вспомним выражение $z_x = -F_x/F_z$ и аналогичное по y . Подставим их в формулу для dS при явном задании и вынесем общий знаменатель из-под корня. Корень станет модулем градиента функции связи. Итак,

$$dS = \frac{1}{F_z} \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} dx dy = \frac{|\nabla F|}{|F_z|} dx dy.$$

На других кусках также применимы симметричные варианты

$$dS = \frac{|\nabla F|}{|F_y|} dx dz = \frac{|\nabla F|}{|F_x|} dy dz.$$

Поэтому иногда удаётся вычислить площадь, массу и прочие величины, минуя явное задание поверхности и параметризацию, которые могут быть сложны или вовсе недоступны.

пример?

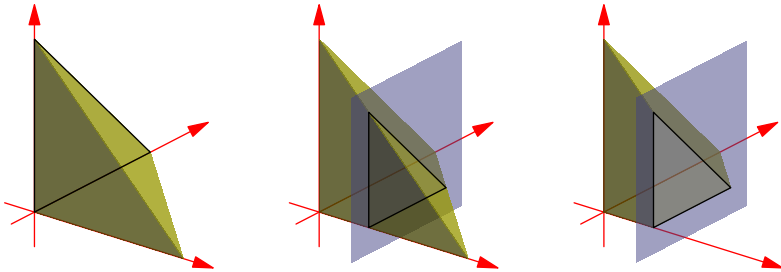
12.5. МНОГОМЕРНЫЕ ОБЪЁМЫ

Всё сказанное о сведении тройного интеграла к повторному относится, с соответствующими поправками, и к многократным интегралам. Посчитаем для примера объёмы простейших многомерных фигур.

выделил
в раздел
01.04.18

Проще всего считать объём n -мерного куба. При длине ребра 1 куб имеет объём $C_n(1) = 1$. При длине ребра a куб имеет объём $C_n(a) = a^n$. Длина ребра является характерным размером куба. Лучше назовём её величиной во избежание ложного намёка на связь с размерностью n . Подобные характерные величины будем использовать и дальше.

Симплекс. Наименьшее выпуклое тело в \mathbb{R}^n , содержащее заданные точки p_0, p_1, \dots, p_n , не лежащие в одной гиперплоскости, называют **симплексом** («простой» в латыни). Это многогранник, а исходные точки, и только они, являются его вершинами. Все грани симплекса любой размерности — тоже симплексы. При $n = 1, 2, 3$ соответственно получаем отрезок, треугольник и треугольную пирамиду.



Возьмём симплекс с одной вершиной в начале координат и остальными в концах единичных базисных векторов. Тогда область задаётся неравенствами

$$0 \leq x_1, \dots, 0 \leq x_n, x_1 + \dots + x_n \leq 1.$$

Вычислим её объём $T_n(1)$, интегрируя по слоям $\{x_n = \text{const}\}$. Сечения являются $(n-1)$ -мерными симплексами

$$0 \leq x_1, \dots, 0 \leq x_{n-1}, x_1 + \dots + x_{n-1} \leq 1 - x_n,$$

причём при $x_n = 0$ этот симплекс единичен, а при $x_n > 0$ его характерная величина уменьшается до $1 - x_n$. Поэтому

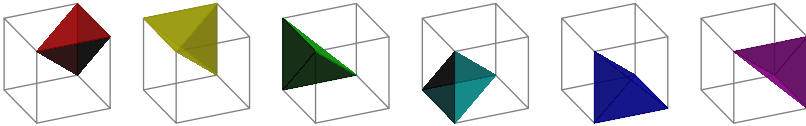
$$T_n(1) = \int_0^1 T_{n-1}(1 - x_n) dx_n = T_{n-1}(1) \int_0^1 (1 - x_n)^{n-1} dx_n = T_{n-1}(1)/n.$$

Получена простая рекуррентная формула. В размерности 1 искомый объём сводится к длине единичного отрезка, и это начальное условие для решения рекурсии. В итоге $T_n(1) = 1/n!$.

Единичный симплекс иной формы задаётся неравенствами

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1.$$

В сечениях $\{x_n = \text{const}\}$ опять получаем симплексы той же структуры, меньшей на 1 размерности и характерной величины x_n . Интегрирование даёт ту же рекурсию. Однако в этом случае можно увидеть ответ $1/n!$, составив единичный куб из $n!$ аналогичных симплексов с переставленными местами координатами.



разбиваемость
тетраэдров

Шар. Единичный n -мерный шар задаётся неравенством

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1.$$

В его сечениях $\{x_n = \text{const}\}$ получаем $(n-1)$ -мерные шары

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2$$

радиуса $\sqrt{1 - x_n^2}$. Соответственно, его объём удовлетворяет

$$B_n(1) = \int_{-1}^1 B_{n-1}(\sqrt{1 - x_n^2}) dx_n = B_{n-1}(1) \cdot \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_n.$$

Далее опускаем единичный аргумент у B_i . Интеграл сводится к бета-функции, а она выражается через гамма-функцию:

$$B_n = B_{n-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}.$$

Решать эту рекурсию неудобно: при каждом целом n или в числителе, или в знаменателе аргумент гамма-функции будет полуцелым. Лучше спуститься ещё на шаг, и тогда многое сократится:

$$B_n = B_{n-2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \dots = B_{n-2} \cdot \frac{2\pi}{n}.$$

Значит, ответы могут слегка отличаться для чётных и нечётных n .

Чётные $n = 2k$. Здесь $B_0 = 1$ (одна точка), или же, если 0-мерность смущает, то можно начать с $B_2 = \pi$ (круг). Отсюда

$$B_{2k} = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{2\pi}{4} \times \dots \times \frac{2\pi}{2k} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} = \frac{\pi^k}{k!}.$$

Нечётные $n = 2k + 1$. Здесь $B_1 = 2$ (отрезок $[-1, 1]$) и $B_3 = 4\pi/3$ (обычный шар). Отсюда

$$B_{2k+1} = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2\pi}{5} \times \dots \times \frac{2\pi}{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!}.$$

Обозначения $\lfloor n/2 \rfloor$ и $\lceil n/2 \rceil$ для округления до ближайших целых вниз и вверх позволяют объединить обе формулы:

$$B_n = \frac{2^{\lceil n/2 \rceil} \pi^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n!!}.$$

Глава 13. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ 2

13.1. Почти ФОРМАЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

лекция 9
13.03.17

Приступим к построению двойного интеграла по Риману. Весь процесс переносится на тройные и многократные интегралы с несложными изменениями, обусловленными повышением размерности: они в основном относятся к обозначениям и, в меньшей степени, к терминам. Эпизодически будем указывать необходимые модификации.

Выделим четыре основных предстоящих шага:

- (1) ввести суммы Римана — Дарбу;
- (2) выяснить допустимые классы функций и областей;
- (3) обосновать сведение кратного интеграла к повторному;
- (4) обосновать замену переменных.

Сделаем первые два в этом разделе, а остальные — в следующем.

Одномерный интеграл как образец. Напомним прежде этапы построения интеграла Римана — Дарбу от функции $f(x)$ по отрезку $\Delta = [a, b]$.

Любой упорядоченный набор точек

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b\}$$

называют разбиением отрезка Δ . Выбрав разбиение, для каждой его части $p_i = [x_{i-1}, x_i]$ определим длину $\lambda_i = x_i - x_{i-1}$ и точные грани

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in p_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in p_i\}.$$

Значит, приходится предполагать, что функция $f(x)$ ограничена на Δ . Далее, определим нижнюю и верхнюю суммы Дарбу

$$L(\mathcal{P}, f) = \sum m_i \lambda_i, \quad U(\mathcal{P}, f) = \sum M_i \lambda_i$$

по всем частям разбиения.

Поскольку $m_i \leq M_i$, всегда имеем $L(\mathcal{P}) \leq U(\mathcal{P})$. Кроме того, при измельчении разбиения разность между верхней и нижней суммой может лишь уменьшаться: если $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$, то $L(\mathcal{P}) \leq L(\mathcal{Q}) \leq U(\mathcal{Q}) \leq U(\mathcal{P})$.

Теперь определим точные грани

$$L = \sup\{L(\mathcal{P}, f)\}, \quad U = \inf\{U(\mathcal{P}, f)\}$$

по всевозможным конечным разбиениям \mathcal{P} нашего отрезка Δ . Если $L = U$, то объявим это число искомым значением интеграла

$$\int_{\Delta} f(x) dx.$$

Если $L < U$, то объявим функцию $f(x)$ неинтегрируемой на Δ .

рисунок?

Двойной интеграл по квадрату. Адаптируем одномерные построения для двумерного случая. Входными параметрами являются множество $D \subset \mathbb{R}^2$ и числовая функция на нём. Какие именно множества и функции оказываются пригодны, сразу не угадаешь; этим вопросом лучше заняться, уже имея конструкцию перед глазами и отмечая её требования. Это возможно, потому что только в нахождении приемлемых ограничений есть что-то новое, а в остальном процесс идёт по накатанной колее.

Чтобы не размышлять над проблемой разбиения загадочных множеств, начнём с (замкнутого) квадрата C со сторонами, параллельными осям координат, и ограниченной функции $f: C \rightarrow \mathbb{R}$.

Сначала будем разбивать квадрат C исключительно на прямоугольники некоторой сеткой координатных линий $x = x_i$ и $y = y_j$. Назовём **разбиением** полученный конечный набор \mathcal{P} замкнутых прямоугольников p_{ij} , объединение которых равно C . Определим точные грани

рисунок?

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in p_{ij}\}, \quad M_{ij} = \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in p_{ij}\},$$

затем нижнюю и верхнюю суммы Дарбу

$$L(\mathcal{P}, f) = \sum m_{ij} S_{ij}, \quad U(\mathcal{P}, f) = \sum M_{ij} S_{ij}$$

по всем частям разбиения. Здесь место длин отрезочков из одномерного случая заняли площади S_{ij} прямоугольников, причём, естественно, площадь каждого полагается равной произведению длин его сторон. Фактически, эта замена является единственным отличием построения от одномерного случая.

Наконец, определим соответствующие точные грани L и U по всевозможным разбиениям квадрата C . Если $L = U$, то объявим это число искомым значением интеграла

$$\iint_C f(x, y) dx dy.$$

Если $L < U$, то объявим функцию f неинтегрируемой на C .

В описанном построении много разных букв, причём некоторые явно излишние. Нет никакой необходимости перечислять прямоугольнички разбиения как p_{ij} . Ссылаться на них можно просто как $p \in \mathcal{P}$, а суммы Дарбу составить из точных граней $m(p)$ и $M(p)$, умноженных на площади $S(p)$.

04.03.16

Хорошие функции на приличной области. Под этим девизом мы будем искать приемлемые предположения о свойствах функции и области, гарантирующие существование интеграла.

рисунок?

Зная уже об интегрировании на отрезке, естественно ожидать, что непрерывные функции хороши. Однако окажется удобным допускать «незначительные» разрывы, например, разрывы в отдельных точках или вдоль линий. Точную характеристику дают в тех же терминах, что и необходимые свойства области. Они описывают границу области. Эта деталь является новой для двойных интегралов, ибо для обычных интегралов по отрезку вопроса нет: граница отрезка оси всегда состоит из двух точек.

Какой же может быть граница плоской области интегрирования? Отвечать можно по-разному, в зависимости от глубины анализа, требуемого для конкретных приложений. Очень простой ответ покрывает тем не менее не только почти все обычные задачи для младших курсов, но и подавляющее большинство нужд естественных наук:

- граница области является кусочно-гладкой.

Это означает, что граница состоит из конечного числа гладких линий. Аналогично, кусочно-гладкая граница области в трёхмерном пространстве состоит из конечного числа гладких поверхностей. Только после того, как достигнута определённая ловкость с интегралами на этом уровне, следует осваивать следующий.

Итак, теория интегрирования не требует гладкости границ. Ослабить ли это предположение до непрерывности? Придёт время, и мы сможем увидеть ужасные последствия такого опрометчивого шага. Истинное условие оказывается иным, причём неожиданным вплоть до парадоксальности:

- граница области имеет нулевую площадь.

Тут и приходится задуматься, что же мы называем площадью. Так возникает понятие меры. Слабенькая версия, мера Жордана, соответствует интегралу Римана; с ней мы сейчас и познакомимся. Настоящая, сильная версия, мера Лебега, соответствует интегралу Лебега; её оставим на будущее, ибо она требует большего труда.

Характеристическая функция и требования к D . Ограниченное множество D лежит в каком-то квадрате C . Обратимся к функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, тождественно равной 1. Разумеется, можно беспрепятственно расширить её нулём вне D . Для неё популярны несколько разных

обозначений; примем χ_D . Если мы надеемся интегрировать по D хоть что-нибудь ненулевое, то уж эта функция должна быть интегрируема.

Как и одномерный, двойной интеграл должен быть аддитивен относительно множеств:

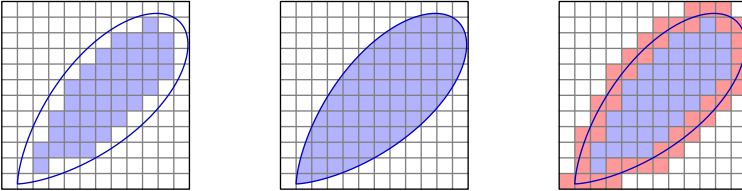
$$\iint_D f \, dx \, dy + \iint_{C \setminus D} f \, dx \, dy = \iint_C f \, dx \, dy.$$

Для характеристической функции множества $D \subset C$ получаем

$$\iint_D dx \, dy = \iint_C \chi_D(x, y) \, dx \, dy.$$

Это число должно иметь смысл площади D .

Суммы Дарбу для $f = \chi_D$ равны суммам площадей прямоугольников разбиения \mathcal{P} , причём по определению точных граней прямоугольнички, «засчитываемые» в нижней сумме $L(\mathcal{P})$, целиком лежат в D , а в верхней сумме $U(\mathcal{P})$ — имеют непустое пересечение с D . Стремление $U(\mathcal{P}) - L(\mathcal{P})$ к нулю при измельчении разбиения и требуется для существования интеграла Римана от (пока постоянной) функции на D .



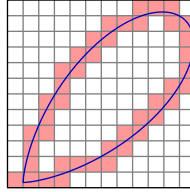
Определение. Назовём указанные наборы прямоугольников внутренним и внешним **замощениями** множества D , а площадью конечного замощения — суммой площадей всех составляющих его прямоугольников.

Определение. Точная верхняя грань $S_*(D)$ площадей конечных внутренних замощений D называется его **внутренней мерой Жордана**. Точная нижняя грань $S^*(D)$ площадей конечных внешних замощений D называется его **внешней мерой Жордана**.

Определение. Ограниченное плоское множество D называется **измеримым по Жордану**, или **квадрируемым**, если $S_*(D) = S^*(D)$. Это число и считается площадью D .

Упражнение. Докажите, что если измеримы множества A и B , то измеримы $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$. Выразите $S(A \cup B) + S(A \cap B)$ через $S(A)$ и $S(B)$.

Каждое внешнее замощение множества D содержит некоторое его внутреннее замощение, возможно пустое, а остаток замощает его границу ∂D . Измеримость D равносильна условию $S(\partial D) = 0$.



Упражнение. График всякой непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке имеет нулевую площадь.

Упражнение. Измеримо всякое множество, граница которого состоит из конечного числа графиков непрерывных функций.

Представляя ∂D как разность замыкания \bar{D} и внутренности D° , применим аддитивность интеграла:

$$\iint_{\partial D} dx dy = \iint_{\bar{D}} dx dy - \iint_{D^\circ} dx dy.$$

Подобное равенство должно выполняться и при интегрировании любой ограниченной функции на D . Вывод: если D измеримо, то безразлично, открыто оно, замкнуто, или нечто «посередине», ибо граница множества интегрирования не влияет на значение интеграла.

Упражнение. Докажите, что множество всех точек с рациональными координатами в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ не измеримо по Жордану.

Итак, обычно будем предполагать область интегрирования D измеримой по Жордану и компактной (то есть замкнутой и ограниченной). В учебниках суммы Дарбу строятся для конечных внутренних и внешних замощений D без обращения к объемлющему квадрату.

Интегрирование почти непрерывных функций. В одномерном случае мы видели интегрируемость непрерывной функции на отрезке и заметили, что легко охватить и кусочно-непрерывные. Теперь посмотрим, что же можно сделать в двумерном.

Определение. Колебанием функции f на множестве X называется

$$\omega(X, f) = \sup_X f - \inf_X f \geq 0.$$

Колебание применяют при анализе сходимости сумм Дарбу.

Теорема. *Всякая непрерывная функция на квадрате интегрируема по Риману.*

Доказательство. Рассуждение идейно повторяет доказательство одномерного аналога. Непрерывная функция f на компакте ограничена и равномерно непрерывна, поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что если во внешнем замощении \mathcal{P} диаметры (диагонали) всех прямоугольничков $p \in \mathcal{P}$ меньше δ , то колебания $\omega(p, f)$ на них меньше ε . Тогда при измельчении разбиения разности

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) = \sum \omega(p, f)S(p) < \varepsilon \sum S(p) = \varepsilon S(\mathcal{P})$$

сходятся к нулю. □

Теорема. *Всякая непрерывная функция на компакте с кусочно-гладкой границей интегрируема по Риману.*

Доказательство. Частный случай следующей теоремы, ибо область с кусочно-гладкой границей измерима (по упражнению). □

Теорема. *Всякая непрерывная функция на измеримом компакте интегрируема по Риману.*

Чтобы доказать эту промежуточную по общности версию, возьмём квадрат C , покрывающий исходный компакт D . Наша функция f задана только на D , но мы сделаем из неё функцию на C , полагая $f(x, y) = 0$ для всех точек $(x, y) \in C \setminus D$. Этот приём называют **продолжением функции нулём**. Продолженная функция может быть разрывна в точках границы D , но мы надеемся преодолеть эту проблему, потому что теперь всегда требуем $S(\partial D) = 0$. Однако в таком случае мы можем ослабить условие на исходную функцию, позволяя и ей иметь разрывы на столь же «маленьком» подмножестве.

04.03.16

Теорема. *Если множество точек разрыва ограниченной функции f на измеримом компакте D имеет нулевую площадь, то f интегрируема на D .*

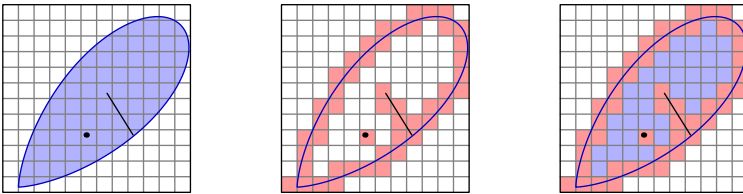
Назовём такие функции **почти непрерывными**. Предположения этой теоремы и будут нашими стандартными требованиями к областям и функциям, появляющимся в интегралах.

Доказательство. Как и выше, измельчением замощений нужно суметь сделать разность между верхней и нижней суммами Дарбу меньше любого заданного положительного числа. Устанавливая в первом семестре интегрируемость кусочно-непрерывной функции на отрезке,

мы покрыли точки разрыва отдельно от промежутков непрерывности. Ту же тактику применим сейчас.

Продолжим функцию f нулём вне D на квадрат C . Множество точек разрыва новой функции, состоящее из точек разрыва исходной функции и точек на границе D , обозначим через X . Поскольку $S(X) = 0$, для произвольного $\varepsilon > 0$ множество X имеет конечное внешнее замощение \mathcal{A}_ε общей площади меньше ε . Колебание функции на каждом **прямоугольнике** замощения никак не больше её колебания на всём квадрате, так что

$$U(\mathcal{A}_\varepsilon) - L(\mathcal{A}_\varepsilon) < \omega(C, f) \cdot \varepsilon = K\varepsilon.$$



Далее, замыкание D_ε непокрытой части квадрата C компактно и на нём функция f непрерывна, причём даже равномерно. Дополним \mathcal{A}_ε до такого замощения \mathcal{P}_ε всего C , чтобы колебания f на **прямоугольничках** внутри D_ε не превышали ε . Тогда

$$U(\mathcal{P}_\varepsilon \setminus \mathcal{A}_\varepsilon) - L(\mathcal{P}_\varepsilon \setminus \mathcal{A}_\varepsilon) < \varepsilon \cdot S(D) = \varepsilon S,$$

и поэтому $U(\mathcal{P}_\varepsilon) - L(\mathcal{P}_\varepsilon) < (K + S)\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Здесь на рисунках все прямоугольнички замощения — квадраты одного размера, но так сделано только для простоты и красоты. При практических вычислениях на компьютерах выгодны гораздо более сложные сетки, даже не прямоугольные, а вблизи плохих точек выбираются ячейки помельче, что хорошо согласуется с идеей только что проведённого рассуждения.

13.2. ОБОСНОВАНИЯ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ

лекция 10
16.03.17

Аддитивность, линейность, монотонность. Тут нет неожиданностей. Запись этих свойств для двойных интегралов отличается от знакомого одномерного варианта лишь количеством дифференциалов.

- Аддитивность: если $A \cap B$ имеет нулевую площадь, то

$$\int_{A \cup B} f \, dx \, dy = \int_A f \, dx \, dy + \int_B f \, dx \, dy.$$

- **Линейность:** для любых констант α, β

$$\int_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \int_D f dx dy + \beta \int_D g dx dy.$$

- **Монотонность:** если $f \geq 0$ всюду на D , то

$$\int_D f dx dy \geq 0.$$

Знаки интеграла также можно было бы везде продублировать, но здесь мы поленимся это делать, намекая на общность свойств интеграла независимо от его кратности.

Теорема. *Двойной интеграл аддитивен по множествам, линеен и монотонен по функциям.*

Доказательство. Упражнение. Суммы Дарбу обладают аналогичными свойствами, и они выживают при предельном переходе. \square

Напомним ещё три полезных следствия. Первое свойство — прямое обобщение монотонности; иногда именно его и называют монотонностью. Второе — форма теоремы о среднем. Третье — интегральная форма неравенства треугольника (ведь интеграл это предел сумм).

Следствие. *Если $f(x, y) \leq g(x, y)$ всюду на D , то*

$$\int_D f dx dy \leq \int_D g dx dy.$$

Доказательство. Пользуясь линейностью, применяем монотонность к функции $g - f$. \square

Следствие. *Если $m \leq f(x, y) \leq M$ всюду на D , то*

$$m \cdot S(D) \leq \int_D f dx dy \leq M \cdot S(D).$$

Доказательство. Интегрируем неравенство $m \leq f \leq M$, применяя первое следствие. \square

Следствие. *Если f и $|f|$ интегрируемы на D , то*

$$\left| \int_D f dx dy \right| \leq \int_D |f| dx dy.$$

Доказательство. Интегрируем неравенство $-|f| \leq f \leq |f|$, применяя первое следствие. \square

Упражнение. Напишите обобщение свойства аддитивности, пригодное при $S(A \cap B) > 0$.

Упражнение. Напишите формулу для среднего значения функции f на множестве D положительной площади.

Сведение кратного к повторному. Здесь окажется достаточным покопаться в суммах Дарбу только на прямоугольнике, а обобщение затем делается легче. Для непрерывных функций утверждение совершенно бесхитростное; отдельное доказательство его излишне, ибо оно совпадает с последующим более общим случаем.

Следствие. Для всякой непрерывной функции f на прямоугольнике $C = [a, b] \times [c, d]$ повторный интеграл существует и равен двойному:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \iint_C f(x, y) dx dy.$$

Если функция $f(x, y)$ двух переменных непрерывна на C , то для всех $\tilde{x} \in [a, b]$ её сечение $g(y) = f(\tilde{x}, y)$ есть непрерывная функция на $[c, d]$, и интеграл по y автоматически существует.

Если же допустить у $f(x, y)$ разрывы на множестве нулевой площади, то может найтись такое \tilde{x} , что сечение $g(y) = f(\tilde{x}, y)$ разрывно на множестве ненулевой длины. Тогда существование внутреннего интеграла становится дополнительным предположением.

Теорема. Если для интегрируемой функции f на прямоугольнике $C = [a, b] \times [c, d]$ интеграл

$$J(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

существует для всех $x \in [a, b]$, то повторный интеграл

$$\int_a^b J(x) dx$$

существует и равен двойному интегралу

$$\iint_C f(x, y) dx dy.$$

Доказательство. Можно получить неравенства, зажимающие суммы Дарбу для повторного интеграла между суммами Дарбу для двойного интеграла. Ввиду интегрируемости f на прямоугольнике, при измельчении разбиения две крайние суммы сходятся к двойному интегралу;

производная
по области??

пример?

поэтому, две средние суммы сходятся туда же, а это и означает, что повторный интеграл существует и равен двойному.

Удобно разбить стороны по отдельности. Конечное разбиение \mathcal{P} отрезка $[a, b]$ на фрагменты p_i длины Δx_i и конечное разбиение \mathcal{Q} отрезка $[c, d]$ на фрагменты q_j длины Δy_j дают разбиение $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ прямоугольника C на прямоугольнички $p_i \times q_j$. Выпишем теперь искомые зажимающие неравенства:

$$L(f, \mathcal{P} \times \mathcal{Q}) \leq L(J, \mathcal{P}) \leq U(J, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P} \times \mathcal{Q}).$$

Разберём только получение первого, ибо последнее аналогично, а второе заведомо верно: нижние суммы не бывают больше верхних.

По выбранным разбиениям находим точные грани, входящие в нижние суммы Дарбу для всех трёх рассматриваемых интегралов. Это

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in p_i \times q_j\}$$

для кратного интеграла и

$$n_j(x) = \inf\{f(x, y) \mid y \in q_j\}$$

для внутреннего интеграла, то есть $J(x)$. Соответствующие обозначения для повторного интеграла нам не нужны. При этом

$$m_{ij} = \inf\{n_j(x) \mid x \in p_i\},$$

так что $m_{ij} \leq n_j(x)$ для всех $x \in p_i$.

Умножая эти неравенства на Δy_j и затем суммируя по j , получим

$$\sum_j m_{ij} \Delta y_j \leq \sum_j n_j(x) \Delta y_j \leq J(x),$$

ибо в середине видим нижнюю сумму Дарбу для $J(x)$. Отсюда

$$\sum_j m_{ij} \Delta y_j \leq \inf\{J(x) \mid x \in p_i\}.$$

Умножая на $\Delta x_i > 0$ и затем суммируя по i , приходим в точности к **требуемому** неравенству. \square

Упражнение. *Адаптируйте доказательство на разные случаи сведения тройного интеграла к повторному: двойной от однократного; однократный от двойного.*

Криволинейные трапеции. При сведении двойного интеграла к повторному наиважнейший тип областей интегрирования представляют криволинейные трапеции

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

для непрерывных функций y_1 и y_2 . В этом случае

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

рисунки

разные криволинейные трапеции

Теорема. Если для интегрируемой функции f на D интеграл

$$J(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

существует для всех $x \in [a, b]$, то повторный интеграл существует и равен двойному.

Доказательство. Здесь работает простой трюк с подменой области: найдём наименьший прямоугольник $C = [a, b] \times [c, d]$, покрывающий D , и доопределим f нулём вне D . Тогда продолжение f интегрируемо на C , а его «вертикальные» сечения — на $[c, d]$, причём

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Поэтому применима прямоугольная версия теоремы. □

Упражнение. Всякую замкнутую область, граница которой состоит из конечного числа графиков непрерывных функций, можно разбить на конечное число криволинейных трапеций.

рисунок?

рисунки

разрезание на криволинейные трапеции

Часто бывает удобно разрезать область горизонтально.

выделить
раньше!

Сетка криволинейных координат. Нам уже хорошо знакомы полярные координаты на плоскости:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Ограничимся для примера областью

$$\Delta = \{(\rho, \varphi) \mid 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\},$$

на которой взаимно-однозначное отображение $(\rho, \varphi) \mapsto (x, y)$ является диффеоморфизмом. При этом образ прямоугольника Δ плоскости (ρ, φ) есть кольцевой сектор D .

четверть кольца

рисунок

Можно говорить, что тем самым на D задана полярная система координат. Образы линий $\{\rho = \text{const}\}$ и $\{\varphi = \text{const}\}$ задают в D сетку **координатных линий**; в данном случае это отрезки лучей и дуги окружностей.

сетка криволинейных координат

Иные системы криволинейных координат, скажем (ξ, η) , на иной области D отличаются конкретным видом области Δ и отображения $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$, которое должно быть диффеоморфизмом $\Delta \rightarrow D$. По теореме об обратном отображении, это гарантируется предположением относительно его якобиана:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \neq 0 \text{ для всех } (\xi, \eta) \in \Delta.$$

Вспоминаем геометрический смысл якобиана: его модуль в каждой точке $(\xi, \eta) \in \Delta$ равен коэффициенту искажения площади малых прямоугольничков вблизи неё при отображении $\Delta \rightarrow D$. Покрывая D сеткой декартовых координат $\{x = \text{const}\}$ и $\{y = \text{const}\}$, мы разбиваем площадь области на малые элементы $dx dy$, а именно, площади прямоугольничков. Покрывая D сеткой криволинейных координат, мы

рисунок
гиперссылка

примеры
с рисунками
рисунок

разбиваем её площадь на «искажённые» элементы

$$dS = dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta.$$

искажение площади

Поскольку площадь области не зависит от способа её разбиения,

$$S(D) = \iint_D dx dy = \iint_\Delta \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta.$$

Строгое доказательство этого равенства увидим как частный случай общей формулы замены; также можно дать его иначе, используя криволинейные интегралы и формулу Грина из следующей главы.

Формула замены. Приведём формулировку и доказательство только для двойных интегралов и гладкого обратимого отображения

$$\Delta \rightarrow D, \quad \begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta), \end{cases}$$

с положительным якобианом $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ в каждой точке области. Обобщение на произвольную конечную размерность делается вполне аналогично, но требует более тяжёлых обозначений.

Теорема. При этих предположениях формула замены переменных

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta$$

верна для любой непрерывной функции f на области D .

Появляющийся под интегралом якобиан не должен порушить непрерывность. Для непрерывности всех составляющих его частных производных и нужна гладкость замены. Постоянство знака J позволяет исключить значения $J = 0$, мешающие применению теоремы о неявной функции. Далее все замены по умолчанию предполагаем такими.

На практике, и в частности при переходе от декартовых координат к полярным, нарушены и условие $J \neq 0$, и, как следствие, условие обратимости. Теоретически эту проблему обходят, удаляя из области малую и затем ещё уменьшаемую окрестность проблемной точки, подобно происходящему в разделе о несобственных интегралах.

Разложение на примитивные замены. Назовём замену переменных **примитивной**, если заменяется лишь одна переменная. В нашем случае их всего две, так что это либо замена вида $(x, y) \mapsto (t, y)$ через подстановку $x = x(t, y)$, либо замена вида $(x, y) \mapsto (x, t)$ через подстановку $y = y(x, t)$.

Лемма. *Всякая замена переменных $(x, y) \mapsto (u, v)$ реализуется в окрестности каждой точки композицией примитивных.*

Доказательство. Выберем любую точку. Поскольку якобиан отличен от нуля, это же верно хотя бы для одной из производных x_u и x_v . Два случая разбираются одинаково, поэтому мы считаем, что $x_u \neq 0$. Теорема о неявной функции даёт из уравнения $x = x(u, v)$ гладкую функцию $u = u(x, v)$ на некоторой окрестности нашей точки. Подставляя её в $y = y(u, v)$, мы выразим y через x и v . Формулы перехода

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y(u(x, v), v); \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(u, v), \\ v = v. \end{cases}$$

реализуют цепочку примитивных замен $(x, y) \mapsto (x, v) \mapsto (u, v)$.

В другой точке другая частная производная может быть ненулевой. На соответствующей окрестности получим другую цепочку из двух примитивных замен. \square

Полезно отследить поведение матриц Якоби при представлении замены цепочкой примитивных. Для выписанных в доказательстве теоремы формул перехода имеем пару обратных матриц

$$\frac{D(x, v)}{D(u, v)} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{D(u, v)}{D(x, v)} = \begin{bmatrix} u_x & u_v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В частности, $x_u u_x = 1$ и $x_u u_v + x_v = 0$. Используем эти равенства для упрощения первой строки произведения

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, v)} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x & u_v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u u_x & x_u u_v + x_v \\ y_u u_x & y_u u_v + y_v \end{bmatrix}.$$

Во второй строке распознаём результаты применения правила цепочки при дифференцировании формулы перехода $y = y(u(x, v), v)$.

Упражнение. *Выпишите какую-нибудь цепочку из трёх примитивных замен, композиция которых даёт замену $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$.*

Доказательство формулы замены. Разобьём всю область на куски так, что для каждого куска найдётся одна цепочка примитивных замен, представляющая заданную замену на всём куске. Далее рассуждаем отдельно на каждом куске. Ввиду перемножения якобианов при композиции замен, достаточно установить формулу для одной примитивной замены. Ограничимся двумерным случаем.

Для примитивной замены $(x, y) \mapsto (x, v)$ искомая формула проще,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x, y(x, v)) \left| \frac{\partial y}{\partial v} \right| dx dv,$$

и её удаётся получить предельным переходом из равенства интегральных сумм.

Действительно, разобьём область Δ плоскости (x, v) на прямоугольнички сеткой координатных прямых: вертикальных $\{x = \text{const}\}$ и горизонтальных $\{v = \text{const}\}$. Отображение замены переносит это разбиение на область D плоскости (x, y) ; назовём результат разбиением \mathcal{P} . Горизонтальные линии в нём искривлены по формулам $y = y(x, v)$, но вертикальные остаются прямыми. Последнее и открывает путь к простому рассуждению.

рисунок

В суммы Римана (здесь они удобнее сумм Дарбу), подчинённые разбиению \mathcal{P} , входят площади маленьких криволинейных трапеций этого разбиения. Прямоугольничку $[x, x + \Delta x] \times [v, v + \Delta v]$ соответствует криволинейная трапеция площади

$$\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} (y(x, v + \Delta v) - y(x, v)) dx.$$

Применим сначала интегральную теорему о среднем к подынтегральной функции, непрерывно зависящей от x : на отрезке $[x, x + \Delta x]$ найдётся такая точка x_* , что

$$\Delta S = (y(x_*, v + \Delta v) - y(x_*, v)) \cdot \Delta x.$$

А теперь применим дифференциальную теорему о среднем, известную нам как формула конечных приращений, к гладкой функции $y(x_*, v)$: на отрезке $[v, v + \Delta v]$ найдётся такая точка v_* , что

$$\Delta S = \frac{\partial y}{\partial v}(x_*, v_*) \cdot \Delta v \cdot \Delta x.$$

Пределом интегральных сумм с такими площадями является интеграл в правой части формулы замены. Интеграл в левой части получается как предел сумм Римана для обычного прямоугольного разбиения.

Случай нескольких переменных отличается лишь тем, что вместо мимолётного интеграла по отрезку $[x, x + \Delta x]$ фигурирует интеграл по кубу, тут же так же исчезающий по теореме о среднем.

С формальной точки зрения данное рассуждение пока не тянет на строгое доказательство, поскольку содержит пробел. Мы разбили область Δ на криволинейные трапеции координатной сетки, хотя суммы Дарбу исходно всегда строили лишь для разбиения на прямоугольники, то есть сеткой декартовых координат. Залатать эту дырочку не так уж трудно: нужно просто сразу позволить криволинейные сетки именно такого сорта, как в рассуждении для примитивной замены. Точные грани в суммах Дарбу остаются, а площади прямоугольничков заменяются на площади криволинейных трапеций, но мы знаем, как выразить их однократными интегралами.

и что?

13.3. ЗАВИСИМОСТЬ ИНТЕГРАЛА ОТ ПАРАМЕТРА

Постановка вопросов. Простейшего вида интеграл, зависящий от параметра y , есть функция

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

с постоянными a и b . Вообще же вместо этих постоянных могут быть функции от параметра, либо вместо обычного интеграла — более сложный: несобственный, кратный и другие. Интеграл такого типа встретился нам ещё в первом семестре при определении гамма-функции.

Такая функция наравне с прочими может подвергаться обычным операциям анализа: предельным переходам, дифференцированию, интегрированию. Часто бывает удобно свести нужную операцию над $I(y)$ к аналогичной операции над $f(x, y)$, то есть поменять её местами с интегрированием, или «внести под знак интеграла». Желательно знать, когда такие манипуляции законны. Здесь мы изучим, что выходит при самых простых предположениях. Лёгкость результатов объяснима тем, что интегрирование улучшает свойства функции.

Наиболее лаконично, хотя не наиболее понятно и привычно, эти вопросы выражаются в операторных обозначениях. Обозначим через \mathcal{L}_y , \mathcal{D}_y и \mathcal{I}_y соответственно операции предельного перехода, дифференцирования и интегрирования по y , без явного уточнения точки или области их применения. Интегрирование по x , независимо от его конкретной природы, обозначим через \mathcal{I}_x . Нас интересуют условия, при

лекция 11
20.03.17

которых операторы перестановочны:

$$\mathcal{L}_y \mathcal{I}_x f \stackrel{?}{=} \mathcal{I}_x \mathcal{L}_y f, \quad \mathcal{D}_y \mathcal{I}_x f \stackrel{?}{=} \mathcal{I}_x \mathcal{D}_y f, \quad \mathcal{I}_y \mathcal{I}_x f \stackrel{?}{=} \mathcal{I}_x \mathcal{I}_y f.$$

Поскольку интегрирование и дифференцирование формально основаны на предельных переходах, всё это частные случаи общего вопроса о перестановке пределов.

Формула Лейбница. Важнейшим приложением здесь является дифференцирование интеграла по параметру, поэтому сначала приведём основную формулу без обоснований.

Дифференцирование интеграла $I(y)$ простейшего вида для достаточно хороших функций выполняется внесением под знак интеграла:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx.$$

Требования на функцию f естественны: поскольку в формулу входят сама функция и её частная производная f_y , обе они должны быть непрерывны. Ниже мы увидим, что этого достаточно.

Реже встречаются интегралы вида

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

с зависимостью от параметра не только в подынтегральной функции, но и в пределах интегрирования. Её тоже нужно учесть при дифференцировании. Считая этот интеграл функцией $I(y, \alpha, \beta)$ трёх параметров, в случае $\alpha = \alpha(y)$ и $\beta = \beta(y)$ мы должны вычислять полную производную $I'(y)$ по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dI}{dy} = \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial I}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dy},$$

что и разворачивается в формулу Лейбница, только слагаемые обычно пишут в обратном порядке. Частную производную I_y находят по предыдущей формуле внесением под знак интеграла, а выделенные слагаемые — внеинтегральные, или граничные. Частную производную I_β выражают по фундаментальной теореме анализа, ведь это просто производная интеграла по своему переменному верхнему пределу. Частную производную I_α по нижнему пределу выражают аналогично, сперва поменяв местами верхний и нижний пределы и не забывая при

этом сменить знак. В итоге получаем **формулу Лейбница**

$$I'(y) = f(\beta(y), y) \cdot \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx.$$

Требования на функцию f те же самые, что и в простейшем случае выше, но дополнительно нужна гладкость функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, ибо в формулу входят их производные.

Интегралы по постоянному отрезку. Теперь начнём развивать обоснования. Сперва возьмём непрерывную функцию f на прямоугольнике $C = [a, b] \times [c, d]$.

При интегрировании $I(y)$ вопрос законности перестановки местами двух интегрирований есть вопрос равенства повторных интегралов:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Как мы знаем, если $f(x, y)$ непрерывна на C , то искомое равенство гарантировано благодаря существованию двойного интеграла по C , потому что тогда оба повторных интеграла равны двойному.

Пример (Остроградский). Повторные интегралы функции

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

по квадрату $[0, 1] \times [0, 1]$ имеют неравные значения $\pm\pi/4$. Корень зла: неограниченность функции вблизи точки $(0, 0)$ её разрыва, из-за чего двойной интеграл не существует.

Для вычисления повторных интегралов заметим, что

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy &= \int_0^1 dx \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \left[\arctg x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

а при ином порядке интегрирования появляется минус.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике C , то функция

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

непрерывна на отрезке $[c, d]$.

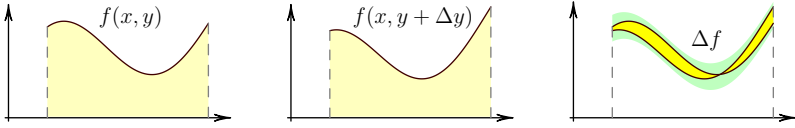
Доказательство. Прямоугольник компактен, поэтому непрерывность $f(x, y)$ на нём сразу даёт равномерную непрерывность: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $|\Delta y| < \delta$ влечёт

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon$$

для всех $(x, y) \in C$. Тогда площади под графиками сечений при фиксированном y удовлетворяют

$$|I(y + \Delta y) - I(y)| < (b - a)\varepsilon,$$

что стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. □



Хотя последний шаг можно сделать подробнее,

$$\begin{aligned} |I(y + \Delta y) - I(y)| &= \left| \int_a^b f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^b f(x, y) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| dx \\ &< \int_a^b \varepsilon dx = (b - a)\varepsilon, \end{aligned}$$

полезно научиться сразу видеть такие заключения.

Аналогично можно получить гладкость $I(y)$, предполагая гладкость $f(x, y)$. На самом же деле, требуется чуть меньше, ибо частная производная по x не задействована.

Теорема. Если дополнительно частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна на C , то $I(y)$ имеет на $[c, d]$ непрерывную производную и

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx.$$

Доказательство. По определению производной, слева стоит предел при $\Delta y \rightarrow 0$ отношения приращений

$$\frac{\Delta I}{\Delta y}(y) = \frac{I(x, y + \Delta y) - I(x, y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} dx.$$

Покажем, что этот предел также равен правой части.

Формула конечных приращений даёт

$$\frac{\Delta f}{\Delta y}(x, y) = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta(x, y)\Delta y),$$

где $0 \leq \theta(x, y) \leq 1$. Зависимость θ от x и y окажется несущественной. В самом деле, запишем равномерную непрерывность производной: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $|\Delta y| < \delta$ влечёт

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \varepsilon$$

для всех $(x, y) \in C$. Для любой функции $0 \leq \theta(x, y) \leq 1$ также получим

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta(x, y)\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \varepsilon;$$

следовательно,

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \varepsilon.$$

Теперь такой же шаг, как и в конце предыдущего доказательства, показывает, что интегралы

$$\frac{\Delta I}{\Delta y}(y) = \int_a^b \frac{\Delta f}{\Delta y}(x, y) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

отличаются не более чем на $(b - a)\varepsilon$, то есть сколь угодно мало. \square

Было бы логично, если бы рядом с этими двумя теоремами стояло утверждение, что если $f(x, y)$ интегрируема, то $I(y)$ интегрируема. Как отмечалось при обсуждении сведения двойного интеграла к повторному, это не удаётся, и потому для упрощения мы сразу предположили, что $f(x, y)$ непрерывна. Нарушение этой логичности указывает, ни много ни мало, на слабость самого понятия интеграла Римана — Дарбу. Более тщательно вопросы зависимости интеграла от параметра прорабатываются в рамках теории интеграла Лебега.

Интегралы по переменному отрезку. Теперь изучим свойства интеграла

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx,$$

где функции $\alpha(y) \leq \beta(y)$ достаточно хорошие, а их графики не покидают прямоугольник $C = [a, b] \times [c, d]$.

два графика зажаты

Как мы уже видели, если $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны, а функция $f(x, y)$ непрерывна на криволинейной трапеции

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), c \leq y \leq d\} \subset C,$$

то $I(y)$ интегрируема и интегрирования по x и y можно поменять местами — конечно, если при другом порядке пределы интегрирования выражаются легко.

Теорема. В этих же предположениях функция $I(y)$ непрерывна на отрезке $[c, d]$.

Доказательство. При сравнении площадей под графиками функций $f(x, y + \Delta y)$ и $f(x, y)$ при фиксированном y теперь необходимо учесть непрерывную подвижку вертикальных сторон сечения подграфика. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta > 0$, что в дополнение к

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon$$

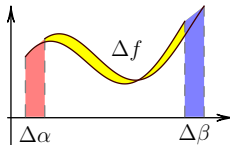
при $|\Delta y| < \delta$ имеем

$$|\alpha(y + \Delta y) - \alpha(y)| < \varepsilon, \quad |\beta(y + \Delta y) - \beta(y)| < \varepsilon.$$

Значит, площади $I(y + \Delta y)$ и $I(y)$ отличаются не более чем на $M\varepsilon$, где

$$M = f(\beta(y), y) + f(\alpha(y), y) + (\beta(y) - \alpha(y)) + 2\varepsilon$$

есть сумма длин трёх прямолинейных сторон трапеции. □



Теорема. Если дополнительно частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна на D , а функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ гладкие на $[c, d]$, то $I(y)$ имеет на $[c, d]$ непрерывную производную, вычисляемую по формуле Лейбница.

Доказательство. Пользуясь прежней картинкой, нужно оценить скорости изменения кусочков площади подграфика вдоль трёх переменных сторон. Это и даёт в пределе $\Delta y \rightarrow 0$ три указанных слагаемых: интегральное слагаемое не отличается от случая постоянного отрезка; в граничных слагаемых перемножаем высоты подвижных сторон на скорости их смещения, а знак минус перед вторым слагаемым объясняется тем, что рост $\alpha(y)$ уменьшает отрезок интегрирования. \square

Интегралы по компакту. Увеличивая количество аргументов у функции f , легко заменить интегрирование по постоянному отрезку на интегрирование по не зависящему от y измеримому n -мерному компакт. При этом и формулировки теорем о свойствах $I(y)$, и их доказательства принципиально не меняются. Например, для гладкой функции f и компакта K получим

$$\frac{d}{dy} \iint_K f(x_1, x_2, y) dx_1 dx_2 = \iint_K \frac{\partial}{\partial y} f(x_1, x_2, y) dx_1 dx_2.$$

В случае переменного компакта $K(y)$ утверждение об интегрировании по параметру полностью сохраняется вместе с доказательством, но вопросы о непрерывности и дифференцировании по параметру уводят в детали, связанные с границей ∂K .

Несобственные интегралы. В этой ситуации много сложностей и невиданных ранее эффектов. Мы ограничимся серией иллюстраций.

Интегрируя непрерывную функцию $f(x, y)$ по бесконечному полуинтервалу, легко получить разрывную функцию $I(y)$. В дальнейшем оказываются полезны такие интегральные представления важных разрывных функций.

Пример. Рассмотрим несобственный интеграл

$$I(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x} dx.$$

Чуть ниже мы проверим, что он сходится. А пока, подставляя в него $x = z/y$ и $dx = dz/y$, получим при $y > 0$

$$I(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = I(1),$$

но при $y < 0$

$$I(y) = \int_0^{-\infty} \frac{\sin z}{z} dz = - \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = -I(1).$$

Поскольку $I(0) = 0$, мы можем написать, что $I(y) = c \cdot \operatorname{sgn} y$ для неизвестной пока постоянной c .

31.03.17

При этом нельзя найти производную $I'(y)$, внося дифференцирование под знак интеграла: оно приводит к несобственному интегралу

$$\int_0^{\infty} \cos xy \, dx,$$

расходящемуся при всех значениях y .

Доказательства всех теорем этого раздела о непрерывности и гладкости опираются на равномерную непрерывность. Можно ослабить предположение непрерывности f или f_y до почти непрерывности и тем не менее выйти на равномерную непрерывность (в стиле доказательства интегрируемости почти непрерывной функции). Несобственные же интегралы подразумевают отказ либо от компактности области интегрирования, либо от ограниченности функции на ней, а потому для них все приведённые здесь доказательства рассыпаются. Чтобы спасти их, придётся сделать именно равномерную непрерывность исходным требованием.

Более того, в определении несобственного интеграла заложен дополнительный, по сравнению с обычным (собственным) интегралом, предельный переход. Естественно, это усложняет вопросы о перестановочности операций. Их изучение требует понятия равномерной сходимости, которым мы займёмся в конце семестра.

зацепка!

С другой стороны, благодаря богатству эффектов, многие важные интегралы, зависящие от параметра, именно несобственные. Такими примерами занят остаток этого раздела.

31.03.17

Пример. Несобственный интеграл

$$I(y) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+y}, \quad y > 0,$$

расходится при всех значениях y . Дифференцирование по параметру под знаком интеграла приводит к сходящемуся интегралу:

$$\frac{dI}{dy} = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x+y} \right) dx = - \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+y)^2} = \left[\frac{1}{x+y} \right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} = -\frac{1}{y}.$$

Отрежем особенность, рассматривая

$$I(y, b) = \int_0^b \frac{dx}{x+y} = \ln(b+y) - \ln y.$$

Дифференцируя, видим

$$\frac{\partial I}{\partial y}(y, b) = \frac{1}{b+y} - \frac{1}{y}.$$

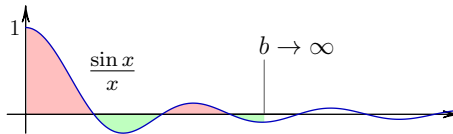
Теперь в пределе при $b \rightarrow +\infty$ исчезает первая дробь, а остающаяся вторая придаёт смысл полученной выше производной.

Подобные вычисления характерны в квантовой электродинамике и они дают величины, великолепно согласующиеся с экспериментами.

Искусное искусственное введение параметров. Вернёмся к упомянутому чуть выше интегралу. Это классический пример; не самый простой, зато очень полезный и сам по себе, и как иллюстрация общего подхода. Вычислим интеграл Дирихле

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

с помощью искусственно вводимого параметра.



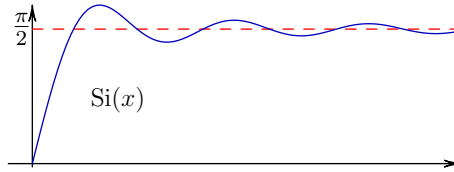
Поскольку интеграл несобственный, проверим сперва сходимость. Разобьём положительную полуось на отрезки $\Delta_k = [k\pi, (k+1)\pi]$, внутри которых подынтегральная функция сохраняет знак, и положим

$$a_k = \int_{\Delta_k} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Тогда $|a_k| \rightarrow 0$ строго монотонно, и по признаку Лейбница знакопеременный ряд $\sum a_k$ сходится. Для каждого $b \in \Delta_k$ значение

$$\text{Si}(b) = \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n < k} a_n + \int_{k\pi}^b \frac{\sin x}{x} dx$$

зажато между соседними **частичными суммами** этого ряда. Поэтому $\text{Si}(b)$ стремится при $b \rightarrow \infty$ к сумме ряда. Неэлементарная функция Si называется **интегральным синусом**. Здесь оба рисунка растянуты в 4 раза по вертикали.



Упражнение. Установите расходимость интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Теперь обратимся к приёму вычисления. Введём интеграл

$$I(t) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Сходимость $I(t)$ при $t > 0$ не хуже, чем при $t = 0$. Продифференцируем по параметру, несмотря на то, что, поскольку интеграл несобственный, это выходит за рамки обоснований, данных выше в теореме:

$$I'(t) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin x dx.$$

Этот интеграл вычисляется интегрированием по частям дважды, либо через комплексную экспоненту. Затем легко найти первообразную $I(t)$:

$$I'(t) = -\frac{1}{1+t^2} \implies I(t) = -\arctg t + C.$$

Заметим, что $I(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$; поэтому $C = \pi/2$. Наконец, при $t \rightarrow 0$, проигнорировав необходимость обоснования непрерывности $I(t)$, получим ответ:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Упражнение. Опишите сделанный трюк иными словами как смену порядка интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-xt} \sin x dx dt.$$

Упражнение. Обоснуйте манипуляции с интегралом Дирихле с помощью выделения большого компакта, описанного ниже.

Выделение большого компакта. Показанный выше приём отрезания особенности можно также называть выделением большого компакта; цель его — создать условия для применения теорем, полученных на компактах. Разберём пример такого более тяжёлого сорта.

Зависящий от параметра несобственный интеграл, появившийся в этом курсе первым из собратьев, и давно, определяет гамма-функцию:

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} x^{y-1} e^{-x} dx.$$

Установим непрерывность $\Gamma(y)$ на произвольном отрезке $[c, d] \subset [1, \infty)$. Мотив отступа от нуля в том, что при $y \geq 1$ особенность только на бесконечности, а подынтегральная функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна (упражнение) на полуполосе $[0, \infty) \times [c, d]$. Несмотря на это, рассуждение как в теореме о непрерывности по параметру для случая отрезка здесь напрямую не годится, ибо $b - a$ бесконечно. Локализация проблемы сразу же указывает, где искать заплатку.

Разобьём $\Gamma(y)$ на **неполную гамма-функцию** и «остаток»:

$$\Gamma(y, b) = \int_0^b x^{y-1} e^{-x} dx, \quad R(y, b) = \int_b^{\infty} x^{y-1} e^{-x} dx.$$

Сходимость определяющего $\Gamma(y)$ несобственного интеграла означает, что $R(y, b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow +\infty$ для каждого y . Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $b \gg 1$ так, что

$$|R(y, b)| = |\Gamma(y) - \Gamma(y, b)| < \varepsilon$$

при $y = d$, а тогда это неравенство верно для всех $y \in [c, d]$, ибо при фиксированном $b \geq 1$ остаток монотонно возрастает по y .

Теперь воспользуемся равномерной непрерывностью $f(x, y)$ на прямоугольнике $C = [0, b] \times [c, d]$: выберем такое $\delta > 0$, что $|\Delta y| < \delta$ влечёт

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| = |x^{\Delta y} - 1| \cdot x^{y-1} e^{-x} < \varepsilon/b$$

для всех $(x, y) \in C$. Тогда

$$|\Gamma(y + \Delta y, b) - \Gamma(y, b)| < \varepsilon$$

и, добавляя малые остатки $R(y, b)$ и $R(y + \Delta y, b)$, получим в итоге

$$|\Gamma(y + \Delta y) - \Gamma(y)| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon.$$

Приём выделения большого компакта применим и к другим сходящимся несобственным интегралам, ведь стремление остатка к нулю — их общее свойство.

Упражнение. Почему было взято именно ε/b , а не просто ε ?

не успел

рисунок

Упражнение. Найдите заплатку для случая $0 < y < 1$.

Упражнение. Установите гладкость $\Gamma(y)$ при $y > 0$.

13.4. НЕСОБСТВЕННЫЕ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

лекция 12
23.03.17

Во избежание массы технических тонкостей, теоретическая часть этого раздела изложена схематично. Для определённости с размерностью, будем здесь писать во всех интегралах dS , что соответствует плоским областям и двойным интегралам.

Ограничение области. Несобственные кратные интегралы функции f по области D могут быть двух типов: из-за неограниченности f на D (проблемы в конечных точках); из-за неограниченности D (проблема на бесконечности). В обоих случаях определения несобственного интеграла основаны на одной идее.

рисунок

ограничение области

Область D обрезаается, чтобы проблемные точки остались снаружи, и получается собственный интеграл по области $D_\varepsilon \subset D$. Затем вырезы устремляются к проблемным точкам при $\varepsilon \rightarrow 0$, и **несобственным интегралом** называется предел

разной
в вырезах

$$\int_D f dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon} f dS.$$

Несобственный интеграл **существует**, смотря по тому, существует ли этот предел. Если предел конечен, то несобственный интеграл **сходится**, а иначе он **расходится** (включая случай, когда он даже не существует).

Весьма тонкий момент здесь в том, что удаляемые окрестности проблемных точек можно выбирать разной формы, лишь бы $D_\varepsilon \rightarrow D$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Чтобы несобственный интеграл сходился, должны совпадать конечные пределы интегралов, получаемые при всевозможных таких процессах. Выгодно всегда требовать роста D_ε при уменьшении ε .

Теорема. Несобственные интегралы обладают стандартными свойствами аддитивности, линейности и монотонности.

Доказательство. Упражнение. □

Сходимость и абсолютная сходимость. Если $f \geq 0$ на D , то её интеграл монотонно зависит от D_ε , поэтому для существования искомого предела достаточно совокупной ограниченности всех этих интегралов. Аналогично и для $f \leq 0$.

Теорема. Если сходится интеграл

$$K = \int_D |f| dS,$$

то также сходится интеграл

$$\int_D f dS.$$

Иными словами, абсолютная сходимость влечёт сходимость.

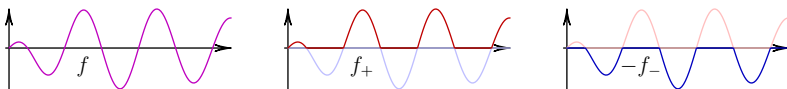
Доказательство. Такой вывод сделать легко. Хитрые функции

$$f_\pm = \frac{|f| \pm f}{2}$$

удовлетворяют неравенству $0 \leq f_\pm \leq |f|$. Поскольку

$$\int_{D_\varepsilon} f_\pm dS \leq \int_{D_\varepsilon} |f| dS \leq K,$$

несобственные интегралы от f_\pm сходятся. Тогда сходится и несобственный интеграл от $f_+ - f_- = f$. \square



Несобственные кратные интегралы обладают весьма любопытным свойством, которого нет у несобственных интегралов на прямой: сходимость влечёт абсолютную сходимость. Доказательство, приведённое, например, в учебнике Фихтенгольца, довольно длинно и здесь опущено, но интересно отметить тот шаг, который на прямой не проходит: мистическим образом, дело оказывается в том, что при удалении одной точки \mathbb{R}^n остаётся связным лишь при $n > 1$.

Интеграл Эйлера — Пуассона. Ещё в первом семестре мы не раз видели интеграл

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Идея его вычисления в том, чтобы считать $I_2 = I_1^2$ двойным интегралом и перейти к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi. \end{aligned}$$

Предельный переход к бесконечной области (всей плоскости) на самом деле совершается на последнем шаге, после вычисления обычного интеграла по кругу радиуса $R \rightarrow +\infty$.

31.03.18

Чтобы обосновать этот трюк, обозначим через $I_2(A)$ интеграл от функции $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ по множеству $A \subset \mathbb{R}^2$. Тогда $A \subseteq B$ влечёт $I_2(A) \leq I_2(B)$, поскольку $f(x, y) > 0$. Теперь возьмём такие круг A , квадрат B и круг C , все с центром в начале координат, что $A \subset B \subset C$. Значение интеграла по квадрату зажато между значениями интегралов по кругам, поэтому при стремлении размеров фигур к бесконечности значения интегралов по квадратам и по кругам монотонно возрастают к общему пределу. Такой способ обоснования работает и во многих других ситуациях.

Можно также найти значение многомерного аналога

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2},$$

представив I_n как I_1^n . Интересно, что подынтегральная функция

$$e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} = e^{-r^2}$$

и здесь зависит только от расстояния r от точки до начала координат. Такие функции называются **сферически симметричными**.

Объём шара и площадь сферы в \mathbb{R}^n . Найдём сначала связь между n -мерным объёмом $V_n(r)$ шара

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\}$$

и $(n-1)$ -мерной «площадью» $S_n(r)$ его граничной сферы

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = r\}.$$

При $r = 1$ будем писать просто V_n и S_n . Геометрически ясно, что $V_n(r) = V_n \cdot r^n$ и $S_n(r) = S_n \cdot r^{n-1}$. По определению производной,

$$V_n'(r) = S_n(r),$$

и поэтому

$$S_n(r) = \frac{d}{dr} V_n(r) = \frac{d}{dr} (V_n \cdot r^n) = V_n \cdot nr^{n-1}$$

даёт $S_n = nV_n$.

Достаточно узнать любую из констант V_n и S_n . Для этого снова вычислим интеграл I_n , сведя его к повторному интегралу, где первый интеграл возьмём по $(n-1)$ -мерной сфере радиуса r . На ней подинтегральная функция постоянна; тут и появляется «площадь»:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2} dV = \int_0^\infty \left(\int_{\{\|\mathbf{x}\|=r\}} e^{-\|\mathbf{x}\|^2} dS \right) dr \\ &= \int_0^\infty S_n(r) e^{-r^2} dr = S_n \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr. \end{aligned}$$

Оставшийся интеграл приводим к гамма-функции. В итоге

$$S_n = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2).$$

Подстановкой $n = 1, 2, 3$ можно сверить значения с известными. Полезно также сверить ответ с полученным ранее для объёма n -мерного шара, где опора на интеграл Эйлера — Пуассона закамouflирована использованием взятого готового значения $\Gamma(1/2) = I_1$.

Многомерные степенные особенности. Изучим интегрируемость на \mathbb{R}^n сферически симметричной функции $g(r) = r^{-\lambda}$, где

$$r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

как и выше. Это очень распространённая функция. Скажем, гравитационный потенциал точечной массы и потенциал электрического поля точечного заряда ($n = 3$) отличаются от неё лишь константами. Здесь есть две особенности: одна в нуле, вторая на бесконечности.

Теорема. *Несобственный интеграл от $g(r) = r^{-\lambda}$:*

- (1) по единичному шару B сходится $\Leftrightarrow \lambda < n$;
- (2) по «внешности» шара, то есть $\mathbb{R}^n \setminus B$, сходится $\Leftrightarrow \lambda > n$.

Доказательство. Функция постоянна на каждой сфере с центром в начале координат, поэтому интеграл по такой сфере радиуса r равен $S_n(r)r^{-\lambda}$. Тогда интеграл по шаровому слою

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a \leq \|\mathbf{x}\| \leq b\}$$

сразу сводится к обычному интегралу по отрезку:

$$\int_D g dV = \int_a^b S_n(r)r^{-\lambda} dr = S_n(1) \int_a^b r^{n-1-\lambda} dr.$$

Теперь раздельно рассмотрим две наличные особенности.

- (1) особенность в нуле: $b = 1$ и $a \rightarrow 0$;
- (2) особенность на бесконечности: $a = 1$ и $b \rightarrow \infty$.

Критерий сходимости в обоих случаях был найден в первом семестре: показатель степени сравнивается с -1 . Оттуда и возникают указанные в формулировке неравенства. \square

Ввиду общего свойства монотонности интеграла, полученный критерий применим также к любой функции f , эквивалентной g . Эквивалентность означает, что найдутся такие положительные константы $m \leq M$, что

$$m\|\mathbf{x}\|^{-\lambda} \leq |f(\mathbf{x})| \leq M\|\mathbf{x}\|^{-\lambda}.$$

На самом деле, для установления сходимости достаточно иметь оценку $|f(\mathbf{x})| \leq M\|\mathbf{x}\|^{-\lambda}$, а расходимости — оценку $|f(\mathbf{x})| \geq m\|\mathbf{x}\|^{-\lambda}$.

Связь между функциями В и Г. Установим формулу

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a, b > 0.$$

Для начала запишем

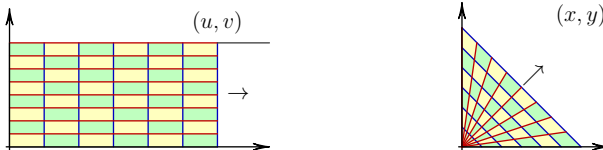
$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1} dx, \quad \Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-y}y^{b-1} dy.$$

Тогда $\Gamma(a)\Gamma(b)$ представляется повторным интегралом, равным двойному интегралу

$$\iint_{\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-x-y}x^{a-1}y^{b-1} dx dy.$$

Делаем замену $x = u(1-v)$, $y = uv$.

Нарисуем области интегрирования вместе с координатными линиями: квадрант по (x, y) и полуполосу по (u, v) . Вычислим якобиан



$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = u$. После замены подынтегральная функция остаётся произведением функций от u и v отдельно. Двойной интеграл сводится к повторному, а он — к произведению

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{a+b-1} du \cdot \int_0^1 (1-v)^{a-1} v^{b-1} dv = \Gamma(a+b) \cdot B(a,b).$$

Законность всех проделанных операций можно обосновать, ограничиваясь конечными областями.

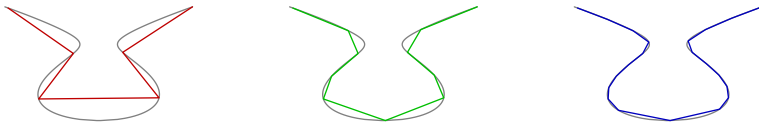
13.5. Тонкости приближения линий и поверхностей

Спрявление линии. Линией, либо **дугой**, назовём непрерывный образ отрезка. Формальное определение длины дуги и криволинейных интегралов вообще также основано на суммах Дарбу.

Наподобие того, как при построении интеграла по отрезку последний разбивают на мелкие фрагменты, разобьём заданную дугу упорядоченным набором точек

$$\{a = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = b\}.$$

Соединим соседние точки прямолинейными отрезками. Длина полученной ломаной линии равна сумме длин отрезков и является некоторым приближением к длине дуги.



Определение. Точную верхнюю грань длин вписанных в дугу ломаных при измельчении разбиения дуги называют **длиной** дуги. Дугу конечной длины называют **спрямляемой**.

Упражнение. Докажите, что всякая гладкая линия спрямляема.

Чтобы подобным образом определить массу дуги переменной линейной плотности ρ , вместо длин фрагментов ломаной нужно складывать их массы. Формализация этого подхода приводит к суммам Дарбу для криволинейного интеграла от функции f по дуге γ :

$$\int_\gamma f(\mathbf{r}(s)) ds.$$

Однако аналитические вычисления на гладких участках линии ведут через параметризацию; если $\gamma = \{\mathbf{r}(u) \mid a \leq u \leq b\}$, то

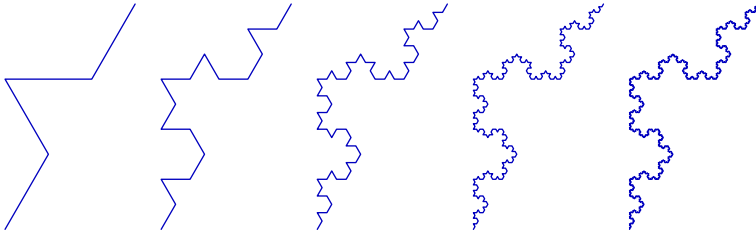
$$\int_{\gamma} f(\mathbf{r}) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(u)) du.$$

Слева интеграл криволинейный, справа обычный.

Исходное условие, что линия есть образ отрезка, иногда приходится ослабить, позволив параметр из промежутка. Естественно, тогда длина даже гладкой линии легко становится бесконечной, причём это возможно и в том случае, когда линия ограничена как подмножество объемлющего пространства и не имеет самопересечений. Например, такова **клотоида**.

Чтобы найти неспрямляемую линию, фактически приходится найти непрерывную функцию, не имеющую производной, что было сложной задачей для классического анализа. Самый известный пример строят явным образом как предел вписанных ломаных со стремящейся к бесконечности длиной. Это ранний пример фрактала.

Пример. Снежинка Коха имеет бесконечную длину.



Функции ограниченной вариации. Гладкость линии не является необходимой для её спрямляемости; в этой связи возникает важный класс функций.

опусти

Непрерывную линию, для простоты плоскую, с параметризацией

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

разобьём точками, соответствующими разбиению

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

параметризующего отрезка. Положим $\Delta x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k)$ и аналогично для $y(t)$. Просуммируем по всем сегментам неравенства

$$|\Delta x_k|, |\Delta y_k| \leq \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \leq |\Delta x_k| + |\Delta y_k|$$

и затем перейдём к точным граням по всем разбиениям. Получится оценка длины L нашей линии: $\max\{X, Y\} \leq L \leq X + Y$, где

$$X = \sup \sum |\Delta x_k|, \quad Y = \sup \sum |\Delta y_k|,$$

Число X называют **вариацией** функции $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$. Вообще, функцию на отрезке, вариация которой конечна, называют **функцией ограниченной вариации** (ибо вариация на отрезке ограничивает сверху вариации на всех заключённых в нём отрезках).

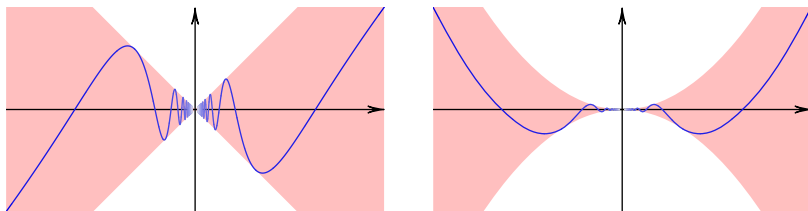
Jordan 1881

Теорема. *Линия спрямляема если и только если она параметризуется функциями ограниченной вариации.*

Доказательство. Ввиду неравенств $\max\{X, Y\} \leq L \leq X + Y$, конечность L равносильна одновременной конечности X и Y . \square

Эта теорема верна для линий в пространстве любой размерности.

Пример. Функции $x \cos \frac{1}{x}$ и $x^2 \cos \frac{1}{x}$ обе становятся непрерывны на отрезке $[-1, 1]$ после устранения разрыва в точке $x = 0$, но у первой вариация бесконечна, а у второй конечна.



Упражнение. Эти вариации равны суммам рядов $\sum n^{-1}$ и $\sum n^{-2}$.

Упражнение. Конечна ли вариация функции $x^2 \cos \frac{1}{x^2}$ на $[-1, 1]$?

Функции ограниченной вариации устроены весьма просто.

Теорема. *Равносильны следующие условия на функцию на отрезке:*

- (1) она имеет ограниченную вариацию;
- (2) она представима как разность двух ограниченных возрастающих функций.

Описываемую разность называют **разложением Жордана**. Если исходная функция ограниченной вариации непрерывна, то монотонные компоненты её разложения всегда можно выбрать непрерывными.

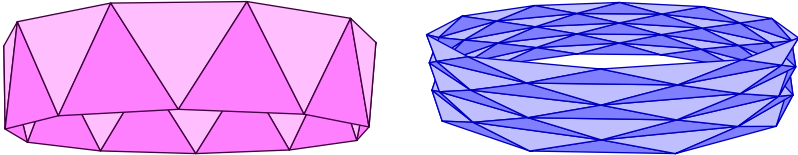
Упражнение. Докажите, что вариация гладкой функции f на отрезке Δ равна интегралу от $|f'|$ по Δ .

Упражнение. Докажите теорему о разложении Жордана, а также утверждение о непрерывности.

Упражнение. Докажите, что ограниченная спрямляемой плоской линией область всегда квадратуема (измерима по Жордану).

Приближение площади поверхности. Хотя схема строгого определения поверхностного интеграла через суммы Дарбу в целом та же, что и для криволинейного, неожиданная проблема встречается в том, как именно приближать поверхность.

Пример (цилиндр, или сапог Шварца). Возьмём прямой круговой цилиндр радиуса 1 и высоты 1. Разрежем его на тонкие слои высоты h и в каждый слой впишем правильную n -угольную антипризму.



Их боковые поверхности, составленные из треугольников, приближают боковую поверхность Σ цилиндра при одновременном стремлении h и $1/n$ к нулю. С помощью элементарной геометрии несложно вычислить сумму S площадей всех треугольников как функцию h и n . Если при этом $1/n^2 = o(h)$, то S стремится к площади Σ , равной 2π . Если же $h = o(1/n^2)$, то $S \rightarrow \infty$. Подбирая зависимость между h и n , можно достичь любого предела суммы S , большего 2π .

Причина аномалии в том, что (тупоугольные) треугольники собираются в складки, как на сапогах и джинсах.

Чтобы избежать такого «складывания», как в примере Шварца, нужно потребовать, помимо стремления к нулю длин всех рёбер приближающего набора многоугольников, чтобы их плоскости стремились к касательным плоскостям в соответствующих точках поверхности. Тогда можно доказать, что для ограниченной гладкой поверхности площади таких приближений действительно имеют общий конечный предел. Он и называется площадью поверхности.

Если кусок гладкой поверхности параметризован, $\mathbf{r}(u, v)$, то плоскость бесконечно малого параллелограмма на векторах $\mathbf{r}_u du$ и $\mathbf{r}_v dv$ и есть касательная плоскость. Поэтому при приближении поверхности

маленькими параллелограммами, полученными из сетки координатных линий $\{u = \text{const}\}$ и $\{v = \text{const}\}$, суммарная площадь приближения стремится к площади поверхности. Отметим также, что $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ есть вектор нормали к поверхности.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 12. Интегрирование в пространстве 1

12.1	Геометрическая и механическая мотивация	3
12.2	Сведение к повторному интегралу	5
12.3	Замены переменных	10
12.4	Интегралы по линиям и поверхностям	16
12.5	Многомерные объёмы	23

Глава 13. Интегрирование в пространстве 2

13.1	Почти формальные построения	26
13.2	Обоснования основных свойств	32
13.3	Зависимость интеграла от параметра	41
13.4	Несобственные кратные интегралы	52
13.5	Тонкости приближения линий и поверхностей	57