

Основы математического анализа

Лектор — Александр Петрович Ульянов

1-й семестр

0. Стартовые позиции

Вещественные числа:

Десятичные дроби. Числовые множества и системы.
Промежутки.

Функции:

Эволюция понятия функции. Формулы и графики. Операции с функциями. Элементарные функции.

Непрерывность и точки разрыва:

Наивная непрерывность. Происхождение разрывов. Типы точек разрыва.

Предпосылки возникновения анализа:

Три важнейшие задачи. Задача о касательной. Задача о площади. Приближённые вычисления.

1. Производные и интегралы

Правила отыскания производных:

Арифметические правила. Производные степенных функций.
Производная показательной функции. Производные тригонометрических функций. Производная обратной функции.
Производная композиции функций. Особые случаи.

Поиск первообразных:

Начальная таблица первообразных. Общие правила. Замена переменной интегрирования. Интегрирование по частям.

Определённый интеграл:

Интегральные суммы. Основные свойства. Фундаментальная теорема анализа. Ещё раз о первообразной степенной функции.
Простейшие преобразования.

Интегралы в геометрии и физике:

Площадь в полярных координатах. Длина линии. Фигуры вращения. Масса и моменты.

Новые функции:

Трансцендентные элементарные функции. Специальные функции. Простейшие дифференциальные уравнения.
Замечательные пределы.

2. Комплексные числа и приложения

Комплексные числа:

Алгебраическая форма и арифметические операции.
Геометрическое представление. Тригонометрическая форма.
Комплексная экспонента.

Уравнение свободных колебаний:

Линейные уравнения второго порядка. Опыт угадывания решений. Характеристическое уравнение и решения.

Интегрирование рациональных функций:

Постановка задачи и стратегия. Разложение дроби на простейшие в теории. Разложение дроби на простейшие на практике.
Интегрирование простейших дробей. Формула понижения.

Рационализация некоторых интегралов:

Тригонометрия. Квадратичные иррациональности.

3. Разложения по степеням

Бином Ньютона:

Бином до Ньютона. Геометрическая прогрессия. Бином Ньютона.

Приближение функций полиномами:

Формула Тейлора. Простейшие разложения. Разложение первообразных.

Асимптотические сравнения:

Асимптотическая эквивалентность. Бесконечно малые.
Преобразования. Бесконечно большие.

Методы разложения функций:

Суммы и разности. Произведения. Композиции. Частные.
Обратные и неявные функции. Решения дифференциальных уравнений.

4. Теоремы о среднем и приложения

Теоремы о среднем:

Локальные экстремумы. Теорема Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши.

Монотонность и экстремумы:

Участки монотонности. Условия локального экстремума.

Выпуклость и перегибы:

Участки выпуклости. Точки перегиба. Неравенство Йенсена.

Доказательства формулы Тейлора:

Формула Тейлора. Интегрирование по частям. Теорема о среднем как шаг индукции. Доказательство Коши. Ряд Тейлора.

Раскрытие неопределённостей:

Применение формулы Тейлора. Правила Бернулли — Лопиталья. Прочие неопределённости.

Интерполяционный полином:

Задача интерполяции. Решение Лагранжа. Решение Ньютона. Предельный переход к формуле Тейлора.

5. Начальная арифметизация

Точные грани и полнота:

Формы выражения полноты. Точные нижние и верхние грани. Теорема Дедекинда о сечении. Принцип вложенных отрезков. Расширенная числовая прямая.

Непрерывность функции в точке:

Эволюция определения непрерывности. Маленькие хитрости неравенств. Непрерывность и операции.

Теоремы о непрерывных функциях:

Липшицевы функции. Промежуточные и экстремальные значения. Равномерная непрерывность. Монотонные функции.

Предел функции:

Определение предела функции в точке. Общие свойства предела. Бесконечные вариации на тему предела.

Признаки существования предела:

Зажатость и замечательные пределы. Критерий Коши. Замена переменной. Правила Бернулли — Лопиталья. Верхние и нижние пределы. Изолированные точки и точки сгущения.

Дифференцируемость и дифференциалы:

Эволюция определения дифференцируемости. Общие правила дифференцирования. Касательные и первые дифференциалы. Две переменных. Высшие дифференциалы.

Интегрирование по Риману и Дарбу:

Площадь как первообразная. Интегральные теоремы о среднем. Линейность, аддитивность, монотонность. Разбиения отрезка. Интегральные суммы Римана. Интегральные суммы Дарбу. Интегрируемость и разрывы.

6. Числовые последовательности

Зачем нужны последовательности:

Определение последовательности. Откуда берутся последовательности.

Предел последовательности:

Определение предела последовательности. Коридоры и хвосты. Арифметические и порядковые свойства предела. Бесконечные пределы. Секвенциальный подход к пределу функции.

Зажатые и монотонные последовательности:

Зажатые последовательности. Монотонные последовательности. Примеры трюков. Число e как предел.

Частичные пределы и компактность отрезка:

Точки сгущения и подпоследовательности. Теорема о точке сгущения. Верхний и нижний пределы. Теорема о покрытии отрезка интервалами. Новые доказательства старых теорем.

Фундаментальные последовательности:

Критерий Коши сходимости последовательности. Сходимость и пополнение. Произведение множеств. Отношения порядка и эквивалентности.

7. Несобственные интегралы и числовые ряды

Несобственные интегралы:

Одна особенность с краю. Разделение особенностей. Общие свойства и формулы. Сравнение и эквивалентность. Степенные особенности. Критерий Коши. Главное значение по Коши.

Бэ́та-функция и гамма-функция:

Предыстория бэ́та-функции. Бэ́та-функция. Определение гамма-функции. Единственность гамма-функции. Исследование гамма-функции. Значения гамма-функции.

Признаки сходимости числовых рядов:

Терминология. Простейшие примеры, признаки и явления. Знакопеременные ряды. Сравнение положительных рядов. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак.

Абсолютная и условная сходимость:

Терминология, примеры и признаки. Перестановка слагаемых ряда. Арифметические операции с рядами. Суммирование расходящихся рядов.

8. Топология эвклидова пространства

Эвклидово пространство:

Арифметическое пространство. Векторы. Эвклидова геометрия.
Нормы и их эквивалентность.

Предел и непрерывность:

Предел последовательности. Непрерывность функции.
Непрерывность отображения.

Открытые и замкнутые множества:

Внутренность, граница, замыкание. Множества, заданные неравенствами. Пересечения, объединения, произведения.
Непрерывность и прообразы. Линейно связные множества.

Компактные множества:

Ограниченные множества. Компактные множества. Непрерывные функции на компакте.

Принцип сжимающих отображений.

9. Гладкие функции

Дифференциал и градиент:

Частные производные. Производные по вектору. Дифференциал и дифференцируемость. Градиент. Гладкие функции.

Дифференцирование композиции:

Правило цепочки для функций. Полная производная. Неявные функции. Однородные функции. Необозначенные аргументы.

Высшие частные производные:

Перестановочность частных производных. Классы гладкости.

Высшие дифференциалы:

Второй дифференциал и гессиан. Высшие дифференциалы.
Лемма об одномерном сечении. Многомерная формула Тейлора.

Локальные экстремумы:

Необходимые условия. Достаточные условия.

Гладкие отображения:

Матрица Якоби. Дифференцирование композиции.
Дифференцирование обратного отображения. Искажение объёма и якобианы. Гомеоморфизмы и диффеоморфизмы.

Литература

1. *Курант Р.*, Курс дифференциального и интегрального исчисления.
2. *Зельдович Я. Б.*, Высшая математика для начинающих и её приложения к физике.
3. *Зельдович Я. Б., Яглом И. М.*, Высшая математика для начинающих физиков и техников.
4. *Смирнов В. И.*, Курс высшей математики.
5. *Физтенгольц Г. М.*, Курс дифференциального и интегрального исчисления.
6. *Физтенгольц Г. М.*, Основы математического анализа.
7. *Кудрявцев Л. Д.*, Курс математического анализа.
8. *Босс В.*, Лекции по математике. Анализ.
9. *Демидович Б. П.*, Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
10. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.*, Сборник задач по математическому анализу.

Программу и задания
по основам математического анализа
составил доцент А. П. Ульянов, Ph.D.