

# Основы математического анализа

*Лектор — Александр Петрович Ульянов*

Преподаватель может разнообразить стандартные задачи

## Задание 6 (сдать к 6 марта)

1. Переменные связаны уравнением  $F(x, y, z) = c$ , где  $c$  — фиксированная постоянная, а  $F$  — гладкая функция, у которой все частные производные первого порядка отличны от нуля. Доказать тождество

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

2. Найти производные первого и второго порядка гладких функций  $x(z)$  и  $y(z)$  в точке  $z = 2$ , если

$$2x^2 + 2y^2 = z^2, \quad x + y + z = 2,$$

причём  $x(2) = -1$  и  $y(2) = 1$ .

3. Для гладких функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  в точке  $x = 0, y = 0$  выполнены условия:  $u = 0, v = 0$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 4.$$

Доказать, что вблизи точки  $u = 0, v = 0$  определены гладкие функции  $x(u, v)$  и  $y(u, v)$ , и найти их первые частные производные в этой точке.

4. На плоскости  $Oxy$  найти все точки, вблизи которых из уравнений

$$u = x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

нельзя выразить  $x, y$  как гладкие функции от  $u$  и  $v$ .

5. Найти условие, при котором функция  $z(x, y)$  вблизи некоторой точки определяется уравнением  $F(x + z, y + z) = 0$ . Выразить  $dz$  и  $d^2z$  через  $dx, dy$  и частные производные данной дважды гладкой функции  $F$ .

6. Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  в точке, соответствующей  $u = 1$  и  $v = 0$ , если

$$x = u - v^2, \quad y = u^2 + uv + v, \quad z = 2v + \ln u.$$

7. Преобразовать уравнение

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x},$$

принимая за новые переменные  $u = x$  и  $v = x/y$ , а за новую функцию  $w = xz - y$ .

8. Доказать, что уравнения

$$x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0, \quad x^2 + z^2 - u^2 + 9 = 0$$

определяют гладкое двумерное многообразие в четырёхмерном пространстве. Найти на нём точки экстремума функции  $u - x$ . Описать касательные плоскости к многообразию в этих точках.

9. Выяснить, какие точки поверхности

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8z - 4 = 0$$

наиболее удалены от точки  $(0, 0, 4)$  и на какое расстояние.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + 2y^2 - 6x$  на круге  $x^2 + y^2 \leq 25$ .

11. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$$

12. Вычислить повторный интеграл

$$\int_a^0 d\varphi \int_0^\varphi \rho d\rho$$

двумя способами: напрямую и поменяв порядок интегрирования, подразумевая, что  $(\rho, \varphi)$  это полярные координаты. Нарисовать область интегрирования.

### Задание 7 (сдать к 27 марта)

1. В единичном круге наугад выбрана точка. Найти вероятность, что она окажется внутри цветочка, ограниченного линией  $\rho = |\cos 3\varphi|$ .
2. Найти момент инерции относительно оси  $Oy$  однородной пластины единичной плотности, ограниченной линиями

$$xy = 1/2, \quad xy = 2, \quad y = x/2, \quad y = 2x.$$

3. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_T \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$$

по всей области определения подынтегральной функции.

4. Пара длинных круговых цилиндров диаметра 1 касаются вдоль образующих, проходящих через центр единичного шара. Найти объём части шара, находящейся снаружи цилиндров.
5. Вычислить моменты инерции относительно координатных осей однородного тела единичной плотности, ограниченного поверхностью  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = z$ .
6. Вывести формулу

$$\iiint_T x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} dx dy dz = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c+1)},$$

где  $T$  есть симплекс

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + y + z \leq 1.$$

7. Найти объём  $n$ -мерного конуса

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq x_n^2, \quad 0 \leq x_n \leq 1.$$

8. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx,$$

применяя дифференцирование по параметру.

9. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx,$$

представив подынтегральную функцию в виде интеграла.

10. Исследовать сходимость двойного несобственного интеграла

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2 + y^2) dx dy.$$

11. Исследовать сходимость двойного несобственного интеграла

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{(x+y)^p}.$$

12. Исследовать сходимость тройного несобственного интеграла

$$\iiint_D \frac{dx dy dz}{|x|^a + |y|^b + |z|^c},$$

где  $D$  есть дополнение к единичному шару с центром в начале координат. *Указание:* обобщённая сферическая замена; однако проще первой заменой привести знаменатель к  $u^2 + v^2 + w^2$ , затем детали второй, сферической замены окажутся несущественны.

### Задание 8 (сдать к 24 апреля)

1. Найти координаты центра масс однородной линии

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t, \quad z = e^{-t}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

2. Найти момент инерции относительно оси  $Oz$  части однородного гиперболического параболоида  $z = xy$  внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = 1$ .

3. Описать векторные линии векторного поля  $\mathbf{r} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ .

4. Найти потенциал

$$U(\mathbf{r}_0) = \iint_{\Sigma} \frac{\varrho dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

простого слоя, распределённого по сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  с постоянной плотностью  $\varrho$ .

5. Окружность радиуса  $r$  катится без проскальзывания, касаясь изнутри неподвижной окружности радиуса  $nr$ , где число  $n$  целое. Тогда отмеченная точка на подвижной окружности пробегает замкнутый контур  $\gamma$ . Найти площадь области, ограниченной  $\gamma$ .

6. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_{\gamma} \frac{x dy + y dx}{x^2 + y^2}$$

по окружности  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ , пробегаемой против часовой стрелки.

7. Ограниченная плоская область  $D$  в первом квадранте  $x, y \geq 0$  имеет кусочно-гладкую границу. Доказать, что значение интеграла

$$2\pi \oint_{\partial D} xy dy$$

равно объёму тела, образованного вращением  $D$  вокруг одной из осей координат.

8. Функция  $u(x, y)$  гармонична на ограниченной плоской области  $D$ , включая границу. Найти поток градиента  $u$  через границу  $\partial D$ .

9. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\gamma} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

по линии, концы которой находятся на расстояниях  $a$  и  $b$  от начала координат.

10. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_{\gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$$

по линии пересечения полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  и цилиндра  $x^2 + y^2 = x$ , пробегаемой против часовой стрелки, если смотреть из начала координат.

11. Найти поток векторного поля  $\mathbf{r}$  через кусок  $|z| \leq a$  однополостного гиперболоида

$$x = \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = \operatorname{sh} u.$$

12. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\Sigma} \frac{dx \wedge dy}{z}$$

по внешней стороне эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

### Задание 9 (сдать к 29 мая)

1. Найти напряжённость электрического поля, создаваемого равномерно заряженными: шаровым слоем  $a \leq r \leq b$ ; бесконечной трубкой  $a \leq \rho \leq b$ .

2. Найти поток поля  $\mathbf{f} = xyz \mathbf{i} + y^2 z \mathbf{j} + yz^2 \mathbf{k}$  через часть сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

3. Найти циркуляцию поля  $\mathbf{f} = zx \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + yz \mathbf{k}$  вдоль контура

$$\gamma = \{y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 1\}$$

по часовой стрелке при взгляде из начала координат.

4. Доказать, что всякое центральное поле потенциально, и найти его скалярный потенциал. Описать бездивергентные центральные поля.

5. Даны скалярные поля  $u$  и  $v$ . Для поля  $\nabla u \times \nabla v$  найти дивергенцию и векторный потенциал.

6. Твёрдое тело вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью. Найти дивергенцию и ротор поля скоростей и поля ускорений.

7. Проверить, потенциально и/или соленоидально ли поле

$$(\cos \varphi) \mathbf{e}_\rho - (\sin \varphi) \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z,$$

где координаты цилиндрические.

8. Преобразованием Кельвина функции  $u(x, y, z)$  называют функцию

$$v(x, y, z) = \frac{1}{r} u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right).$$

Докажите, что оно переводит каждую гармоническую функцию в гармоническую. Указание: используйте сферические координаты.

9. Доказать, что дзета-функция Римана

$$\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} n^{-x}$$

непрерывна в области  $x > 1$  и даже имеет на ней непрерывные производные всех порядков.

10. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^p}.$$

11. Определить область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n.$$

12. Применяя дифференцирование, найти сумму степенного ряда

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$