

Вопросы к устному экзамену

по основам математического анализа

ФФ НГУ, июнь 2017

ЛЕКТОР — АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ УЛЬЯНОВ

Список вопросов составлен по оглавлению конспекта лекций. Некоторые вопросы в билетах сформулированы иначе; некоторые сочетают части разных вопросов из этого списка, особенно в билетах на 3. На 3 требуются только вопросы и их части, не выделенные никаким цветом (чёрные), причём только формулировки без доказательств. Выделение номера вопроса означает, что выделен весь вопрос. Основу билетов на 4 составляют, помимо чёрных, [синие](#) вопросы с доказательствами; также туда входят [красные](#) вопросы, но их изложение предполагается с пропусками наиболее сложных мест. В билетах на 5 увеличена доля красных вопросов и их изложение предполагается без пропусков. Вопросы и их части, выделенные серым, не требуются даже на 5.

глава 8

1. **Эвклидово пространство.** Арифметическое пространство. Векторы. Эвклидова геометрия. Нормы и их эквивалентность. Шары и кубики.
2. **Предел и непрерывность.** Предел последовательности. Непрерывность функции. Непрерывность отображения.
3. **Открытые и замкнутые множества.** Различные типы точек. Внутренность, граница, замыкание. Множества, заданные неравенствами. Пересечения, объединения, произведения. [Непрерывность и прообразы.](#) Линейно связные множества.
4. **Компактные множества.** Ограниченные множества. Компактные множества. Непрерывные функции на компакте.
5. **Принцип сжимающих отображений.**

глава 9

6. **Дифференциал и градиент.** Частные производные. Производные по вектору. Дифференциал и дифференцируемость. Градиент. Гладкие функции.
7. **Дифференцирование композиции.** Правило цепочки для функций. Полная производная. Замена независимых переменных. Неявные функции. [Доказательство правила цепочки.](#) [Однородные функции.](#) [Необозначенные аргументы.](#)
8. **Высшие частные производные и дифференциалы.** Перестановочность частных производных. Второй дифференциал и гессиан. Классы гладкости. Многомерная формула Тейлора.
9. **Высшие дифференциалы и формула Тейлора.** [Индексные обозначения.](#) [Лемма об одномерном сечении.](#) [Формула Тейлора в дифференциалах.](#) [Операторные обозначения.](#) [Ряд Тейлора и экспонента.](#)
10. **Локальные экстремумы функции нескольких переменных.** Необходимые условия. Достаточные условия.

глава 10

11. **Гладкие отображения и матрица Якоби.** Ассортимент отображений. Матрица Якоби. Дифференцирование композиции. Дифференцирование обратного отображения.
12. **Криволинейные системы координат.** Сетка координат на плоскости. Цилиндрические и сферические координаты. [Дальнейшие примеры плоских координат.](#) [Дальнейшие примеры трёхмерных координат.](#)
13. **Обратимость отображения и якобиан.** Наводящие соображения об искажении объёма. Искажение объёма и якобиан. [Функции комплексной переменной.](#) Гомеоморфизмы и диффеоморфизмы.
14. **Теорема о неявной функции.** Наводящие соображения. Одна функция двух переменных. Одна функция трёх переменных. Две функции трёх переменных. [Общая теорема о неявной функции.](#)
15. **Теорема об обратном отображении.** Постановка вопроса. [Доказательство локальной обратимости.](#) Неудача глобализации.
16. **Дифференцирование неявных функций.** Первые производные и дифференциалы. Вторые производные и дифференциалы. Высшие производные и дифференциалы.

17. **Особенности линий и поверхностей.** Три способа задания. Примеры особенностей плоских линий. Особенности пересечения. Примеры особенностей поверхностей. **Ребро возврата.** Ласточкин хвост.
18. **Гладкие линии, поверхности и многообразия.** Гладкие через элементарные. **Гладкие многообразия.** Касательное пространство. Уравнения касательной плоскости. **Градиенты связей.**
19. **Условные экстремумы.** Необходимое условие условного экстремума. Метод исключения дифференциалов. Метод множителей Лагранжа. Достаточные условия условного экстремума. Экстремальные значения функции на области.

глава 11

20. **Геометрическая и механическая мотивация интегрирования.** Вычисление объёмов. Кратные и повторные интегралы. Вычисление масс и моментов.
21. **Сведение к повторному интегралу.** Интеграл по прямоугольнику. Интеграл по криволинейной трапеции. Разные сечения. Вычисление некоторых многомерных объёмов.
22. **Замены переменных в кратных интегралах.** Вид элемента площади. Вид элемента объёма. Введение подходящей системы координат.
23. **Интегралы по линиям и поверхностям.** Параметризованная линия. Параметризованная поверхность. Вид элемента площади поверхности.
24. **Почти формальные построения кратного интеграла.** Двойной интеграл по квадрату. Хорошие функции на приличной области. Характеристическая функция и требования к D . Интегрирование почти непрерывных функций.
25. **Обоснования основных свойств интеграла.** Аддитивность, линейность, монотонность. **Сведение кратного к повторному.** Криволинейные трапеции. Сетка криволинейных координат. Формула замены. Разложение на примитивные замены. Доказательство формулы замены.
26. **Зависимость интеграла от параметра.** Постановка вопросов. Формула Лейбница. Интегралы по постоянному отрезку. Интегралы по переменному отрезку. Интегралы по компакту. **Несобственные интегралы.** **Искусное искусственное введение параметров.** Выделение большого компакта.
27. **Несобственные кратные интегралы.** Ограничение области. Сходимость и абсолютная сходимость. Интеграл Эйлера — Пуассона. Объём шара и площадь сферы в $\mathbb{R}^n$. Многомерные степенные особенности. **Связь между функциями B и G .**
28. **Тонкости приближения линий и поверхностей.** Спряmlение линии. Функции ограниченной вариации. Приближение площади поверхности.

глава 12

29. **Векторные поля.** Определения и примеры. Фазовые портреты на плоскости. Операции с векторными полями. Силовое поле протяжённого источника.
30. **Работа и поток на плоскости.** Подвижный базис вдоль линии. Элементы работы и потока. Криволинейные интегралы второго рода. Несложные примеры вычислений.
31. **Ориентированная площадь и формула Грина.** Выражение площади криволинейными интегралами. Ориентация области. Формула Грина. Ориентированная площадь в криволинейных координатах.
32. **Зависимость интеграла от пути.** Консервативные поля и формула Ньютона — Лейбница. Условия потенциальности.
33. **Несколько дополнений.** Приращение угла и интеграл Гаусса. **Циркуляция вокруг дыр и периоды.** Потенциал скорости и функция тока.

глава 13

34. **Интегралы второго рода.** Принципы выбора ориентации. Ориентируемость линии. Ориентируемость поверхности. Работа вдоль линии. Заготовка элемента потока. Поток через поверхность. 2-форма потока. 3-форма объёма.
35. **Дивергенция и формула Гаусса — Остроградского.** Интегральная формула в декартовых координатах. Заготовка дивергенции. Определение дивергенции.
36. **Ротор и формула Стокса.** Интегральная формула в декартовых координатах. Мнемоника ротора. Завихренность. Направляющие косинусы. Определение ротора.

37. **Набла и операторы второго порядка.** Ротор градиента и дивергенция ротора. Оператор Гамильтона. Действие на произведения. Оператор Лапласа.
38. **Ортогональные криволинейные координаты.** Ортогональные координаты и параметры Ламе. Смена системы координат. Градиент. Дивергенция. Лапласиан. Ротор.
39. **Важнейшие классы векторных полей.** Потенциальные и безвихревые поля. Соленоидальные и бездивергентные поля. Разложение Гельмгольца.
40. **Некоторые приложения и дополнения.** Электрическое поле точечного заряда. Электростатическая теорема Гаусса. Дивергенция и законы сохранения. Телесный угол и магнитостатика. Телесный угол и зацепления. Трубки тока и вихревые трубки. Энергия безвихревого движения. Уравнения Максвелла и волновое уравнение для света. Потенциалы в электродинамике. Формулы для разложения Гельмгольца.
41. **Инвариантность при смене базиса.** Смена ортонормированного базиса. Инвариантность дивергенции. Псевдовекторы. Инвариантность ротора. Девиаторы на плоскости. Девиаторы в пространстве.
42. **Дифференциальные формы.** Базисные формы. Линейные операции. Внешнее умножение. Внешнее дифференцирование. Связь дифференциальных форм и векторных полей. Общая теорема Стокса & Со. Уравнения Максвелла.

глава 14

43. **Равномерная сходимость.** История и мотивация. Определение равномерной сходимости. Мажорантный признак Вейерштрасса. Сохранение непрерывности.
44. **Равномерная сходимость и операции.** Перестановка пределов. Интегрирование и дифференцирование. Следствия для рядов. Отложенное доказательство.
45. **Круг сходимости степенного ряда.** Круговая теорема Абеля. Формулы Даламбера и Коши — Адамара. Интегрирование и дифференцирование. Поведение на границе круга.
46. **Суммирование по частям.** Суть приёма. Формальности, первый вариант. Формальности, второй вариант. Признаки сходимости Дирихле и Абеля.
47. **Дельта-функция.** Зарождение. Точечные массы, заряды, импульсы. Фильтрующее свойство. Производные функций, имеющих скачки. Дифференциальные уравнения. Примеры зарождающихся дельта-функций. Производные дельта-функций.
48. **Приближение непрерывных функций полиномами.** Теорема Вейерштрасса. Полиномы Бернштейна.
49. **Ортогональные ряды.** Ортогональные системы. Разложения функций. Решение уравнений. Равенство Парсеваля.
50. **Немного фракталов.** Треугольные образы. Фрактальная размерность. Нигде не дифференцируемые функции. Канторово множество и друзья. Кривые Пеано. Рогатая сфера.

глава 15

51. **Элементарные и пренебрежимые.** Элементарные множества по Лебегу. Пренебрежимые множества. Критерий интегрируемости по Риману.
52. **Мера Лебега.** Внешняя мера. Измеримые множества. Аддитивность. Счётная аддитивность.
53. **Построение интеграла Лебега.** Измеримые функции. Ограниченное построение. Неограниченное построение. Интегрируемые функции.
54. **Предельные свойства интеграла Лебега.** Счётная аддитивность. Монотонная сходимость. Мажорированная сходимость.
55. **Неопределённый интеграл Лебега.** Вопросы к фундаментальной теореме анализа. Функции скачков. Производные монотонных функций. Абсолютно непрерывные функции. Охват фундаментальной теоремы. Сингулярные функции и разложение Лебега.
56. **Функциональные пространства Лебега.** Конечномерные пространства. Функциональные пространства. Гильбертовы пространства.